

1. 방정식 $x^2 + 5y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하면?

① -7

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 7

해설

$$x^2 + 5y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$(x + 2y)^2 + (y - 1)^2 = 0$$

$$x + 2y, y - 1 \text{은 실수이므로 } x + 2y = 0, y - 1 = 0$$

$$\therefore y = 1, x = -2y = -2$$

$$\therefore x + y = -1$$

2. 방정식 $2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 와 y 의 곱은?

① -2

② 3

③ 4

④ 8

⑤ 10

해설

$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$ 에서

$$(x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 8x + 16) = 0,$$

$$(x - 2y)^2 + (x - 4)^2 = 0$$

$$x = 2y, x = 4$$

$$\therefore x = 4, y = 2 \quad \therefore xy = 8$$

3. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.

$$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$ 에서 $x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 4 - 8xy = 0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면

$$(x^2y^2 - 4xy + 4) + (4x^2 - 4xy + y^2) = 0$$

이 때, x, y 가 실수이므로 $xy - 2, 2x - y$ 도 실수이다.

$$\therefore xy - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{7},$$

$$2x - y = 0 \quad \cdots \textcircled{8}$$

⑧에서 $y = 2x$ 이고, 이것을 ⑦에 대입하면 $x^2 = 1$

따라서, $x = 1$ 일 때 $y = 2$, $x = -1$ 일 때 $y = -2$

그러므로 x, y 의 값은 $x = \pm 1, y = \pm 2$ (복부호 동순)

따라서 x, y 의 합은 $-3, 3$

4. $|x + 1| + |y - 2| = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 곱 xy 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$|x + 1| \geq 0, |y - 2| \geq 0$ 이므로 $x + 1 = 0, y - 2 = 0$

$\therefore x = -1, y = 2$

따라서, 구하는 값은 $xy = -1 \cdot 2 = -2$

5. 방정식 $x^2 - 2xy + y^2 + |x + y - 2| = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

주어진 방정식을 정리하면 $(x - y)^2 + |x + y - 2| = 0$

이 때, $(x - y)^2 \geq 0$, $|x + y - 2| \geq 0$ 이므로

㉠이 성립하려면 $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$ 이어야 한다.

두 식을 연립하여 풀면 $x = 1$, $y = 1$

$\therefore xy = 1$

6. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍 (m, n) 의 개수는?

$$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5개 이상

해설

$$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$$

$$(m-4)(n-2) = 8$$

$$8 = 1 \times 8 = 2 \times 4 = 4 \times 2 = 8 \times 1 \text{ 이므로}$$

$$(m, n) = (5, 10), (6, 6), (8, 4), (12, 3)$$

$\therefore$ 4쌍의 (m, n) 이 존재한다.

7. 방정식 $xy + 2x = 3y + 10$ 을 만족하는 양의 정수가 $x = \alpha$, $y = \beta$ 일 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

주어진 식을 변형하면

$$xy + 2x - 3y = 10, \quad xy + 2x - 3y - 6 = 4,$$

$$(x - 3)(y + 2) = 4$$

$y + 2 \geq 3$ 이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$$x - 3 = 1, \quad y + 2 = 4$$

$$\therefore x = 4, \quad y = 2$$

8. 방정식 $2xy-4x-y=4$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 를 구하면 $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$,

$$\begin{cases} x = \gamma \\ y = \delta \end{cases} \text{ 이다.}$$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 x, y 가 양의 정수이므로

$2x-1, y-2$ 도 각각 정수이고 특히 $2x-1$ 은 양의 홀수이다.

$$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = 15$$

9. 방정식 $2x + 5y = 84$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 의 해 중에서 x 의 최댓값을 구하면?

① 36

② 37

③ 38

④ 39

⑤ 40

해설

준식을 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{84 - 2x}{5} = \frac{2(42 - x)}{5} \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦에서 y 가 양의 정수이므로 $42 - x$ 가 5의 배수이다.

따라서, $x = 2, 7, \dots, 37$

$\therefore x$ 의 최댓값은 37

10. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$ 의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a 에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a 는 -10 이상 -2 이하이다.

② a 는 -2 이상 6 이하이다.

③ a 는 6 이상이다.

④ a 는 0 이하이다.

⑤ a 는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β 라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a + 2$$

이 두 식에서 a 를 소거하면

$$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2, (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$$

$\alpha - 1, \beta - 1$ 이 정수이므로

$$\therefore \alpha = 2, \beta = 4 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = 0$$

$$\therefore a = 6, -2$$

11. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

- ① 0 개
- ② 1 개
- ③ 2 개
- ④ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 1 개씩 있다.
- ⑤ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 2 개씩 있다.

해설

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}, \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b}, (a+b)^2 = ab, a^2 + ab + b^2 = 0$$

$$\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0 \text{ 실수로서 이 등식을 만족하는 경우는}$$

$a = 0, b = 0$ 뿐이다.

따라서 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 는 없다.

12. 방정식 $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x - 4y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 값은?

① $x = 2, y = 4$

② $x = 4, y = 2$

③ $x = -1, y = 2$

④ $x = 2, y = -1$

⑤ $x = -2, y = 1$

해설

판별식을 이용하기 위해 준식을 x 에 관하여 정리하면,

$$2x^2 - 4(y+2)x + 5y^2 - 4y + 20 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

①이 실근을 가지므로 $\frac{D}{4} \geq 0$ 에서

$$4(y+2)^2 - 10y^2 + 8y - 40 \geq 0$$

$$6y^2 - 24y + 24 \leq 0$$

$$6(y^2 - 4y + 4) \leq 0$$

$$6(y-2)^2 \leq 0 \quad \therefore y = 2 \quad (\because y \text{ 는 실수})$$

$y = 2$ 를 ①에 대입하면,

$$2x^2 - 16x + 32 = 0, \quad 2(x-4)^2 = 0$$

$$\therefore x = 4$$

13. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(a+2)x + 2a^2 + 6 = 0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 a 의 값을 구하면?

① -1

② 3

③ -1, -3

④ 1, 3

⑤ -3, 1

해설

정수근을 가지려면 일단은 $D \geq 0$ 이어야 하므로 $D/4 = (a+2)^2 - 2a^2 - 6 \geq 0$ 에서 $2 - \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{2} \dots \textcircled{1}$

그런데 a 는 정수이므로 $\textcircled{1}$ 에서 $a = 1, 2, 3$

i) $a = 1$ 일 때 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 의 두 근은

$x = 2, 4$ (조건을 만족)

ii) $a = 2$ 일 때 $x^2 - 8x + 14 = 0$ 의 두 근은

$x = 4 \pm \sqrt{2}$ (조건에 위배)

iii) $a = 3$ 일 때 $x^2 - 10x + 24 = 0$ 의 두 근은

$x = 4, 6$ (조건을 만족)

i), ii), iii)에서 $a = 1, 3$

14. 서로 다른 세 정수 a, b, c 에 대하여 삼차방정식 $(x-a)(x-b)(x-c) = 2$ 가 정수근을 가질 때, 이 근은?

① $\frac{a+b+c}{3}$

② $\frac{a+b+c-1}{3}$

③ $\frac{a+b+c-2}{3}$

④ $\frac{a+b+c-3}{3}$

⑤ $\frac{a+b+c-4}{3}$

해설

$a < b < c$ 라 가정했을때, 정수근을 α 라고 하면, $(\alpha - a)(\alpha - b)(\alpha - c) = 2$ 를 만족하는 순서쌍은 $(1, -1, -2)$ 밖에 없다.

$$\Rightarrow \alpha - a = 1$$

$$\alpha - b = -1$$

$$\alpha - c = -2$$

세 식을 다 더하면,

$$3\alpha = a + b + c - 2, \alpha = \frac{a + b + c - 2}{3}$$

15. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + mx + m^2 - 1 = 0$ 이 정수근을 가질 때, 정수 m 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x^2 + mx + x^2 - 1 = 0$ 에서 근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4(m^2 - 1)}}{2}$$

이 때, x 가 정수이므로

$\sqrt{m^2 - 4(m^2 - 1)} = k$ (단, k 는 정수는 $k \geq 0$)라 하면

$$-3m^2 + 4 = k^2$$

따라서, m 의 개수는 $-1, 0, 1$ 로 3개다.

16. 자연수 n 에 대하여 이차방정식 $x^2 + nx + 2n = 0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. α, β 가 정수일 때, n 은?

① 7, 8

② 8, 9

③ 9, 10

④ 9

⑤ 10

해설

근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -n$, $\alpha\beta = 2n$ 이므로
 $\alpha\beta = -2(\alpha + \beta)$, $\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = 0$, $(\alpha + 2)(\beta + 2) = 4$
 α, β 가 정수이므로 $\alpha + 2, \beta + 2$ 도 정수
 따라서

$$\begin{cases} \alpha + 2 = 1 \\ \beta + 2 = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha + 2 = 2 \\ \beta + 2 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha + 2 = -1 \\ \beta + 2 = -4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \alpha + 2 = -2 \\ \beta + 2 = -2 \end{cases} \text{가 되어}$$

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -6 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

각각의 경우, n 의 값은 $n = -(\alpha + \beta)$ 이므로
 $-1, 0, 9, 8$ 의 값을 갖는다.

17. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(Ⅰ)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

1점짜리 문항을 x 개,

1.5점짜리 문항을 y 개,

2점짜리 문항을 z 개라고 하면

$$x + 1.5y + 2z = 40 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x + y + z = 30 \cdots \textcircled{㉡}$$

($x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$)라고 하면

$$\textcircled{㉠} \times 2 - \textcircled{㉡} \times 3 = -x + z = -10,$$

$x = z + 10$, $z \geq 1$ 이므로

$$x = z + 10 \geq 11$$

이 때 $y = 18$ 이고 준 조건을 만족하므로

x 의 최솟값은 11