1. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1-\sqrt{2}$　② $-1-\sqrt{2}$　③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$　⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{i}$$
$$= (\sqrt{2}+1)\times(-i)$$
$$= -(1+\sqrt{2})i$$

2. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① ± 1　　② ± 2　　③ ± 3　　④ ± 4　　⑤ ± 5

해설

$$i(x+2i)^2 = i(x^2+4ix-4) = x^2 i - 4x - 4i$$
$$= -4x + (x^2-4)i$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$\therefore\ x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

3. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 3(k+2i) - k(-2i)$

$= 3k + (6+2k)i \Rightarrow$ 순허수

$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$

4. 복소수 $z = (2+i)a^2 + (1+4i)a + 2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

해설

$z = (2a^2 + a - 6) + (a^2 + 4a + 4)i$

순허수이므로 $2a^2 + a - 6 = 0$

$\Rightarrow \quad (a+2)(2a-3) = 0$

$\Leftrightarrow \ a = -2$ 또는 $a = \frac{3}{2}$

그런데 $a = 2$ 이면,

$a^2 + 4a + 4 = 0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$\therefore \quad a = \frac{3}{2}$

5. $(x-3)+(y-2)i=2+5i$를 만족하는 실수 x, y에 대하여 $2x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 10 ② 12 ③ 15 ④ 17 ⑤ 20

해설

$x-3=2,\ y-2=5$

$\therefore\ x=5,\ y=7$

$\therefore\ 2x+y=17$

6. $\dfrac{a}{1-i}+\dfrac{b}{1+i}=5$를 만족하는 두 실수 $a,\ b$에 대하여 곱 ab의 값을 구하면?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$\dfrac{a(1+i)}{2}+\dfrac{b(1-i)}{2}=5$

$a(1+i)+b(1-i)=10$,

$(a+b)+(a-b)i=10$

$a+b=10,\ a-b=0$

$2a=10,\ a=5,\ b=5,\ ab=25$

7. 실수 $x,\ y$에 대하여 $(1+i)x+(i-1)y=2i$일 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(1+i)x+(i-1)y=2i$
$(x-y)+(x+y)i=2i$
좌변과 우변이 같아야 하므로, $x-y=0,\ x+y=2$
두 식을 연립하여 풀어주면, $\therefore\ x=1,\ y=1$
$\therefore\ x+y=2$

8. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5, 5, 1), (4, 2, 2), (3, 1, 3)$ 3 개

9. $(1+3i)(1-3i)-(2-i)(3+i)$ 를 계산하면?

① $17-i$ ② $3+i$ ③ $3-i$ ④ $7+i$ ⑤ $7-i$

해설

$(1+3i)(1-3i)-(2-i)(3+i)$
$=(1+9)-(6-i+1)$
$=3+i$

10. $\dfrac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}$ 의 값은?

① i ② $-i$ ③ $-\dfrac{i}{2}$ ④ $\dfrac{1-i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1+i}{2}$

해설

$$\frac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}=\frac{1+(-i)+(-1)}{1+(-1)+1}=\frac{-i}{1}=-i$$

11. $i^{2000}+i^{2002}+i^{2003}+i^{2004}$ 의 값을 구하면?

① 1　② $1-i$　③ $1+i$　④ -1　⑤ 0

해설

$i^4=1$ 이므로

$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 1+(-1)+(-i)+1\\ &= 1-i\end{aligned}$$

12. $i+i^3+i^5+i^7+\cdots+i^{101}=a+bi$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

(좌변)$=i-i+i-i+\cdots+i=i$ 이므로
$i=a+bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=0$, $b=1$
$\therefore\ a+b=1$

13. $f(x) = \dfrac{x}{1-i}$, $g(x) = \dfrac{x}{1+i}$ 인 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\{f(1+i)\}^{2006} + \{g(1-i)\}^{2007}$ 의 값은?

① -2 ② $-1+i$ ③ -1

④ $-1-i$ ⑤ 2

해설

$f(1+i) = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

$g(1-i) = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$

$\therefore$ (준식) $= (i)^{2006} + (-i)^{2007}$

$= i^2 + (-i)^3 \ (\because i^{2004} = (-i)^{2004} = 1)$

$= -1 + i$

14. 2010개의 정수 $a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 은 모두 -1 또는 1 이고, $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이다. 이 때, $x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2009}} \cdot \sqrt{a_{2010}}$ 을 만족하는 x 의 값은?

① i　② $-i$　③ $i,\ -i$　④ -1　⑤ $-1, 1$

해설

$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이므로

$a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 중에는 -1 이 홀수 개가 있다.

(i) -1 이 $4k+1$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 개일 때

$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+1} = i$

(ii) -1 이 $4k+3$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 개일 때

$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+3} = -i$

따라서 만족하는 x 의 값은 $i,\ -i$ 이다.

15. 실수 $x,\ y$ 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 가 $z\bar{z} = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$z = x + yi$ 에서 $\bar{z} = x - yi$ 이므로
$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$
주어진 조건에서 $z \cdot \bar{z} = 4$ 이므로
$x^2 + y^2 = 4$

16. 임의의 두 복소수 $a,\ b$ 에 대하여 연산 $\oplus$ 를 $a \oplus b = ab - (a+b)$ 로 정의한다. $\mathrm{Z} = \dfrac{5}{2-\mathrm{i}}$ 일 때, $\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}}$ 의 값은?

① 1　　② $1+2i$　　③ $1-2i$

④ -1　　⑤ $2-2i$

해설

$\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}} = Z\overline{Z} - (\mathrm{Z} + \overline{Z}),\ Z = 2+i,\ \overline{Z} = 2-i$ 이므로 연산을 계산해보면, $5-4=1$ 답은 ①

17. $\alpha = 2+i$, $\beta = 1-2i$ 일 때, $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $\frac{4}{8}-\frac{3}{8}i$　　② $\frac{4}{8}\pm\frac{3}{8}i$　　③ $\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i$
④ $\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$　　⑤ $\frac{4}{8}+\frac{3}{8}i$

해설

$\alpha = 2+i,\ \beta = 1-2i = -i(2+i) = -i\alpha$ 이므로 $\beta^2 = -\alpha^2$

$\therefore\ \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2} = 0$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\text{준식}) &= \frac{1}{\alpha\beta}\\ &= \frac{1}{(2+i)(1-2i)}\\ &= \frac{1}{4-3i}\\ &= \frac{4+3i}{25}\\ &= \frac{4}{25}+\frac{3}{25}i\end{aligned}$$

18. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉡ $z+\bar{z}=0$ 이면, z 는 순허수이다.
㉢ $z+\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉣ $z-\bar{z}$ 는 항상 순허수이다.
㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$
㉠ $z\bar{z}=a^2+b^2 \Rightarrow$ 실수
㉡ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0, a=0$
$\therefore\ z=bi \Rightarrow$순허수 ($\because\ z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$)
㉢ $z+\bar{z}=2a \Rightarrow$ 실수
㉣ $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$
순허수로 판단하기 쉬우나, $b=0$ 인 경우
$z-\bar{z}=0$ 으로 순허수가 아니다.
㉤ $\frac{1}{z}=c+di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}}=\overline{\frac{1}{z}}=c-di$ 이므로 참

19. $\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 의 켤레복소수를 각각 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라 할 때, $\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$ 의 값은?

① 0　　② 3　　③ $7 - 2i$　　④ $7 - i$　　⑤ $7 + i$

해설

$\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 에서 $\overline{\alpha} = 1 - i$, $\overline{\beta} = 2 + i$ 이므로

$\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$

$= (1 + i)(1 - i) + (1 + i)(2 + i) + (1 - i)(2 - i) + (1 - i)(2 + i)$

$= (1 + 1) + (2 - 1 + 3i) + (2 - 1 - 3i) + (2 + 1 - i)$

$= 7 - i$

20. 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z = a + bi$와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$의 곱 $z\bar{z} = 5$일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$를 간단히 하면?

① b　　② $2b$　　③ 0　　④ $5a$　　⑤ a

해설

$z\bar{z} = 5$,　$\bar{z} = \frac{5}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

21. 복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 다음을 만족하는 z를 구하면?

$z+\bar{z}=4,\quad z\cdot\bar{z}=7$

① $z=1\pm\sqrt{3}i$ ② $z=2\pm\sqrt{3}i$ ③ $z=3\pm\sqrt{3}i$
④ $z=1\pm2\sqrt{3}i$ ⑤ $z=2\pm2\sqrt{3}i$

해설

$z=a+bi$
$z+\bar{z}=2a=4, z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=7$
$\therefore a=2, b=\pm\sqrt{3}$
$\therefore z=2\pm\sqrt{3}i$

22. 복소수 z가 $z+|z|=2+8i$를 만족시킬 때, $|z|^2$의 값은? (단, $z=a+bi$ (a, b 는 실수) 일 때, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 이다.)

① 68　　② 100　　③ 169　　④ 208　　⑤ 289

해설

$z=a+bi$라 놓자.
$z+|z|=2+8i$,
$a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+8i$
$a+\sqrt{a^2+b^2}=2, \quad b=8$
$a+\sqrt{a^2+64}=2$
$\sqrt{a^2+64}=2-a$ 양변제곱하면,
$a^2+64=(2-a)^2=a^2-4a+4$
$4a=-60$, $a=-15$
$\therefore \ |z|^2=a^2+b^2=225+64=289$

23. $x = 3 + 2i$ 일 때, $x^2 - 6x - 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -23

해설

$x = 3 + 2i$ 에서 $x - 3 = 2i$ 의 양변을 제곱하면

$(x - 3)^2 = (2i)^2$ $\therefore$ $x^2 - 6x = -13$

$x^2 - 6x - 10 = -13 - 10 = -23$

$\therefore$ -23

24. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}$를 계산하면?

① $\sqrt{15}$　　② $-\sqrt{15}$　　③ $\sqrt{15}i$
④ $-\sqrt{15}i$　　⑤ -15

해설

$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i=-\sqrt{15}$

25. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}}\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉡}}\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉢}}\frac{\sqrt{-16}}{2} \\ &= \boxed{\text{㉣}}\frac{4i}{2} \\ &= \boxed{\text{㉤}} = \sqrt{-4}\end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.