1. $\frac{1}{\sqrt{-2} - \sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1 - \sqrt{2}$

② $-1 - \sqrt{2}$

③ $(1 + \sqrt{2})i$

④ $-(1 + \sqrt{2})i$

⑤ $(1 - \sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2} - \sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{1}{i} \\ &= (\sqrt{2} + 1) \times (-i) \\ &= -(1 + \sqrt{2})i\end{aligned}$$

2. $i(x + 2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① ± 1

② ± 2

③ ± 3

④ ± 4

⑤ ± 5

해설

$$\begin{aligned}i(x + 2i)^2 &= i(x^2 + 4ix - 4) = x^2i - 4x - 4i \\ &= -4x + (x^2 - 4)i\end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$$\therefore x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

3. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k + 2i) - k(1 - i)^2$ 의 값이 순허수가 되도록 k 의 값을 정하면?

① -2

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}z &= 3(k + 2i) - k(-2i) \\ &= 3k + (6 + 2k)i \Rightarrow \text{순허수} \\ \therefore 3k &= 0, k = 0\end{aligned}$$

4. 복소수 $z = (2 + i)a^2 + (1 + 4i)a + 2(2i - 3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

해설

$$z = (2a^2 + a - 6) + (a^2 + 4a + 4)i$$

순허수이므로 $2a^2 + a - 6 = 0$

$$\Rightarrow (a + 2)(2a - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

그런데 $a = 2$ 이면,

$a^2 + 4a + 4 = 0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

5. $(x - 3) + (y - 2)i = 2 + 5i$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $2x + y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 10

② 12

③ 15

④ 17

⑤ 20

해설

$$x - 3 = 2, y - 2 = 5$$

$$\therefore x = 5, y = 7$$

$$\therefore 2x + y = 17$$

6. $\frac{a}{1-i} + \frac{b}{1+i} = 5$ 를 만족하는 두 실수 a, b 에 대하여 곱 ab 의 값을 구하면?

① 5

② 10

③ 15

④ 20

⑤ 25

해설

$$\frac{a(1+i)}{2} + \frac{b(1-i)}{2} = 5$$

$$a(1+i) + b(1-i) = 10,$$

$$(a+b) + (a-b)i = 10$$

$$a+b = 10, a-b = 0$$

$$2a = 10, a = 5, b = 5, ab = 25$$

7. 실수 x, y 에 대하여 $(1+i)x + (i-1)y = 2i$ 일 때, $x+y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(1+i)x + (i-1)y = 2i$$

$$(x-y) + (x+y)i = 2i$$

좌변과 우변이 같아야 하므로, $x-y=0$, $x+y=2$

두 식을 연립하여 풀어주면, $\therefore x=1, y=1$

$$\therefore x+y=2$$

8. 등식 $(x + yi)(z - i) = 10$ 을 만족하는 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답: 개

▷ 정답: 3개

해설

$$(xz + y) + (yz - x)i = 10$$

$$xz + y = 10 \cdots \textcircled{㉠}, yz - x = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을㉠에 대입

$$y(z^2 + 1) = 10$$

z 를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5, 5, 1), (4, 2, 2), (3, 1, 3)$ 3개

9. $(1 + 3i)(1 - 3i) - (2 - i)(3 + i)$ 를 계산하면?

- ① $17 - i$ ② $3 + i$ ③ $3 - i$ ④ $7 + i$ ⑤ $7 - i$

해설

$$\begin{aligned} & (1 + 3i)(1 - 3i) - (2 - i)(3 + i) \\ &= (1 + 9) - (6 - i + 1) \\ &= 3 + i \end{aligned}$$

10. $\frac{1 + i^3 + i^6}{1 + i^2 + i^4}$ 의 값은?

① i

② $-i$

③ $-\frac{i}{2}$

④ $\frac{1-i}{2}$

⑤ $\frac{1+i}{2}$

해설

$$\frac{1 + i^3 + i^6}{1 + i^2 + i^4} = \frac{1 + (-i) + (-1)}{1 + (-1) + 1} = \frac{-i}{1} = -i$$

11. $i^{2000} + i^{2002} + i^{2003} + i^{2004}$ 의 값을 구하면?

① 1

② $1 - i$

③ $1 + i$

④ -1

⑤ 0

해설

$i^4 = 1$ 이므로

$$i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= 1 + (-1) + (-i) + 1 \\ &= 1 - i \end{aligned}$$

12. $i + i^3 + i^5 + i^7 + \dots + i^{101} = a + bi$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

(좌변) = $i - i + i - i + \dots + i = i$ 이므로

$i = a + bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a = 0, b = 1$

$\therefore a + b = 1$

13. $f(x) = \frac{x}{1-i}$, $g(x) = \frac{x}{1+i}$ 인 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\{f(1+i)\}^{2006} + \{g(1-i)\}^{2007}$ 의 값은?

① -2

② $-1+i$

③ -1

④ $-1-i$

⑤ 2

해설

$$f(1+i) = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$$g(1-i) = \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= (i)^{2006} + (-i)^{2007} \\ &= i^2 + (-i)^3 (\because i^{2004} = (-i)^{2004} = 1) \\ &= -1 + i\end{aligned}$$

14. 2010개의 정수 $a_1, a_2, \dots, a_{2010}$ 은 모두 -1 또는 1 이고, $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2010} = -1$ 이다. 이 때, $x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdots \sqrt{a_{2009}} \cdot \sqrt{a_{2010}}$ 을 만족하는 x 의 값은?

① i

② $-i$

③ $i, -i$

④ -1

⑤ $-1, 1$

해설

$a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2010} = -1$ 이므로

$a_1, a_2, \dots, a_{2010}$ 중에는 -1 이 홀수 개가 있다.

(i) -1 이 $4k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 개일 때

$$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdots \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+1} = i$$

(ii) -1 이 $4k + 3$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 개일 때

$$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdots \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+3} = -i$$

따라서 만족하는 x 의 값은 $i, -i$ 이다.

15. 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 가 $z\bar{z} = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이다.)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$z = x + yi$ 에서 $\bar{z} = x - yi$ 이므로

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$$

주어진 조건에서 $z \cdot \bar{z} = 4$ 이므로

$$x^2 + y^2 = 4$$

16. 임의의 두 복소수 a, b 에 대하여 연산 $\oplus$ 를 $a \oplus b = ab - (a + b)$ 로 정의한다. $Z = \frac{5}{2-i}$ 일 때, $Z \oplus \bar{Z}$ 의 값은?

① 1

② $1 + 2i$

③ $1 - 2i$

④ -1

⑤ $2 - 2i$

해설

$Z \oplus \bar{Z} = Z\bar{Z} - (Z + \bar{Z})$, $Z = 2 + i$, $\bar{Z} = 2 - i$ 이므로 연산을 계산해보면, $5 - 4 = 1$ 답은 ①

17. $\alpha = 2 + i$, $\beta = 1 - 2i$ 일 때, $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\frac{4}{8} - \frac{3}{8}i$

② $\frac{4}{8} \pm \frac{3}{8}i$

③ $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$

④ $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$

⑤ $\frac{4}{8} + \frac{3}{8}i$

해설

$$\alpha = 2 + i, \beta = 1 - 2i = -i(2 + i) = -i\alpha \text{ 이므로 } \beta^2 = -\alpha^2$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= \frac{1}{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{(2+i)(1-2i)} \\ &= \frac{1}{4-3i} \\ &= \frac{25}{4+3i} \\ &= \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i \end{aligned}$$

18. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수임)

- ㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
 ㉡ $z + \bar{z} = 0$ 이면, z 는 순허수이다.
 ㉢ $z + \bar{z}$ 는 항상 실수이다.
 ㉣ $z - \bar{z}$ 는 항상 순허수이다.
 ㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$$

㉠ $z\bar{z} = a^2 + b^2 \Rightarrow$ 실수

㉡ $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 0, a = 0$
 $\therefore z = bi \Rightarrow$ 순허수 ($\because z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$)

㉢ $z + \bar{z} = 2a \Rightarrow$ 실수

㉣ $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$

순허수로 판단하기 쉬우나, $b = 0$ 인 경우
 $z - \bar{z} = 0$ 으로 순허수가 아니다.

㉤ $\frac{1}{z} = c + di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{1}}{\bar{z}} = c - di$ 이므로 참

19. $\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 의 켈레복소수를 각각 $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ 라 할 때, $\alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta}$ 의 값은?

① 0

② 3

③ $7 - 2i$

④ $7 - i$

⑤ $7 + i$

해설

$\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 에서 $\bar{\alpha} = 1 - i$, $\bar{\beta} = 2 + i$ 이므로

$$\alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta}$$

$$= (1 + i)(1 - i) + (1 + i)(2 + i) + (1 - i)(2 - i) + (1 - i)(2 + i)$$

$$= (1 + 1) + (2 - 1 + 3i) + (2 - 1 - 3i) + (2 + 1 - i)$$

$$= 7 - i$$

20. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켈레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z\bar{z} = 5$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right)$ 를 간단히 하면?

① b

② $2b$

③ 0

④ $5a$

⑤ a

해설

$$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right) = \frac{1}{2} (z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$$

21. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 다음을 만족하는 z 를 구하면?

$$z + \bar{z} = 4, \quad z \cdot \bar{z} = 7$$

① $z = 1 \pm \sqrt{3}i$

② $z = 2 \pm \sqrt{3}i$

③ $z = 3 \pm \sqrt{3}i$

④ $z = 1 \pm 2\sqrt{3}i$

⑤ $z = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

해설

$$z = a + bi$$

$$z + \bar{z} = 2a = 4, \quad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = 7$$

$$\therefore a = 2, \quad b = \pm\sqrt{3}$$

$$\therefore z = 2 \pm \sqrt{3}i$$

22. 복소수 z 가 $z + |z| = 2 + 8i$ 를 만족시킬 때, $|z|^2$ 의 값은? (단, $z = a + bi$ (a, b 는 실수)일 때, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.)

① 68

② 100

③ 169

④ 208

⑤ 289

해설

$z = a + bi$ 라 놓자.

$$z + |z| = 2 + 8i,$$

$$a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i$$

$$a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2, \quad b = 8$$

$$a + \sqrt{a^2 + 64} = 2$$

$$\sqrt{a^2 + 64} = 2 - a \quad \text{양변제곱하면,}$$

$$a^2 + 64 = (2 - a)^2 = a^2 - 4a + 4$$

$$4a = -60, \quad a = -15$$

$$\therefore |z|^2 = a^2 + b^2 = 225 + 64 = 289$$

23. $x = 3 + 2i$ 일 때, $x^2 - 6x - 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -23

해설

$x = 3 + 2i$ 에서 $x - 3 = 2i$ 의 양변을 제곱하면

$$(x - 3)^2 = (2i)^2 \quad \therefore x^2 - 6x = -4$$

$$x^2 - 6x - 10 = -4 - 10 = -14$$

$$\therefore -14$$

24. $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5}$ 를 계산하면?

① $\sqrt{15}$

② $-\sqrt{15}$

③ $\sqrt{15}i$

④ $-\sqrt{15}i$

⑤ -15

해설

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} = \sqrt{3}i \cdot \sqrt{5}i = -\sqrt{15}$$

25. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \text{㉠} \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{-2}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \text{㉡} \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \text{㉢} \frac{\sqrt{-16}}{2} \\ &= \text{㉣} \frac{4i}{2} \\ &= \text{㉤} = \sqrt{-4}\end{aligned}$$

▶ 답:

▶ 정답: ㉢

해설

$$\sqrt{-2} \sqrt{-2} = \sqrt{2}i \sqrt{2}i = 2i^2 = -2$$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.