

1. 방정식 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$ 을 만족하는 두 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$ 에서
 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$
 x, y 는 실수이므로 $x = -1, y = 2$
 $\therefore x + y = -1 + 2 = 1$

2. 방정식 $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 곱 xy 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 에서

$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$

$(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$

x, y 가 실수이므로 $x + y = 0, x - 2 = 0$

$\therefore x = 2, y = -2$

$\therefore xy = -4$

3. 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

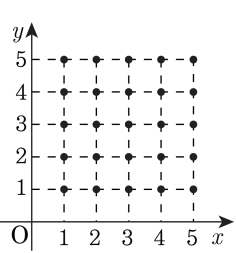
근이 유리수이므로, 판별식 $D \geq 0$ 이어야 한다.

$D = 25 - 8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k = 3, 2, 1, \dots$ 이고,
이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k = 3$ 이다.

4. 다음 그림의 격자점 중 $xy + x - 2y - 2 = 3$ 을 만족시키는 점은 모두 몇 개인가?

- ① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개
 ④ 3 개 ⑤ 4 개



해설

$xy + x - 2y - 2 = x(y + 1) - 2(y + 1)$
 $= (x - 2)(y + 1)$ 이므로
 $(x - 2)(y + 1) = 3$ 에서 문제의 x, y 는
 i) $x - 2 = 1, y + 1 = 3$ 일 때, $x = 3, y = 2$
 ii) $x - 2 = 3, y + 1 = 1$ 일 때, $x = 5, y = 0$
 iii) $x - 2 = -1, y + 1 = -3$ 일 때, $x = 1, y = -4$
 iv) $x - 2 = -3, y + 1 = -1$ 일 때,
 $x = -1, y = -2$
 x, y 는 자연수이므로 조건을 만족시키는 점은 (3, 2) 뿐이다.

5. $xy - 3x - 3y + 4 = 0$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$xy - 3x - 3y + 4 = 0$ 에서

$x(y - 3) - 3(y - 3) - 5 = 0, (x - 3)y - 3 = 5$

$x \geq 1, y \geq 1$ 이므로 $x - 3 \geq -2, y - 3 \geq -2$

(i) $x - 3 = 1, y - 3 = 5$ 일 때, $x = 4, y = 8$

(ii) $x - 3 = 5, y - 3 = 1$ 일 때, $x = 8, y = 4$

따라서, 구하는 값은 $x + y = 4 + 8 = 8 + 4 = 12$

6. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개 이고 배점은 80 점 이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점 의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점 짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2점문항 개수를 x , 3점문항을 y ,
4점문항을 z 라 하자
 $2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots \textcircled{1}$
 $x + y + z = 30 \quad \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - 4 \times \textcircled{2} \Rightarrow y = 40 - 2x$
 $\textcircled{1} - 3 \times \textcircled{2} \Rightarrow z = x - 10$
 $\therefore x = 10$ 이면 $z = 0$
 $\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음
 $\therefore x \geq 11$, 최소 11문항

7. 방정식 $2x^2 + 2xy + 5y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

준식을 y 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$5y^2 + 2(x+6)y + (2x^2 + 6x + 9) = 0$$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (x+6)^2 - 5(2x^2 + 6x + 9) \\ &= -9x^2 - 18x - 9 = -9(x+1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

따라서 $-9(x+1)^2 = 0$

$$x+1 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

준식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$2 - 2y + 5y^2 - 6 + 12y + 9 = 0$$

$$5y^2 + 10y + 5 = 0$$

$$5(y+1)^2 = 0$$

$$\therefore y = -1$$

$$\therefore x + y = -2$$

8. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근이 모두 정수일 때,

상수 k 의 값의 합은?

- ① 0
- ② 2
- ③ 4
- ④ 6
- ⑤ 8

해설

$x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자

$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = k + 3 \rightarrow \alpha + \beta + 3 = \alpha\beta$

$\alpha\beta - \alpha - \beta = 3$

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 4$ α, β 는 정수이므로

$1 \times 4 \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 5, \quad k = 7$

$2 \times 2 \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 3, \quad k = 6$

$-1 \times -4 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = -3, \quad k = -3$

$-2 \times -2 \Rightarrow \alpha = -1, \beta = -1, \quad k = -2$

$\therefore 7 + 6 - 3 - 2 = 8$

9. 이차방정식 $x^2 - (m+4)x + 3 - 2m = 0$ 이 양의 정수근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 10 ③ 13 ④ 17 ⑤ 20

해설

$x^2 - (m+4)x + 3 - 2m = 0$ 의 두 근을 α, β ($\alpha \geq \beta$)라 하면
근과 계수와의 관계로부터 $\alpha + \beta = m + 4 \cdots$ ①

$\alpha\beta = 3 - 2m \cdots \cdots$ ②

① $\times 2 +$ ②를 하면 $\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = 11$

$\therefore (\alpha + 2)(\beta + 2) = 15$

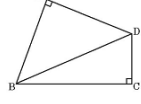
$\alpha + 2 \geq 3, \beta + 2 \geq 3, \alpha \geq \beta$ 이므로

$\alpha + 2 = 5, \beta + 2 = 3$

$\therefore \alpha = 3, \beta = 1$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 9 + 1 = 10$

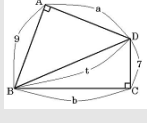
10. 네 변의 길이는 서로 다른 자연수이고, $\overline{AB} = 9$, $\overline{CD} = 7$, $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ 인 사각형 ABCD가 있다. 대각선 BD의 길이를 t 라 할 때, t^2 의 값을 구하면?



- ① 83 ② 85 ③ 87 ④ 120 ⑤ 130

해설

$\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{BD} = t$ 라 할 때,



$$9^2 + a^2 = 7^2 + b^2, \quad b^2 - a^2 = 32$$

(자연수이므로, $b > a$)

$$(b - a)(b + a) = 32 \Rightarrow \text{부정방정식}$$

$b > a$ 이므로

$b - a$, $b + a$ 모두 자연수이므로,

곱이 32가 되는 수의 조합은

$$1 \times 32 = 32, \quad 2 \times 16 = 32, \quad 4 \times 8 = 32, \dots$$

$b - a = 4$, $b + a = 8$ 일 때 조건이 성립하므로,

$a = 2$, $b = 6$ 이다.

$b + a = 16$, $b - a = 2$ 일 때도

성립하나, 서로 다른 자연수 조건에 위배하므로,

$$\therefore t^2 = 9^2 + 2^2 = 81 + 4 = 85$$