1. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

$x,\ y$ 는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

2. 방정식 $2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$의 곱 xy를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$에서

$(x^2+2xy+y^2)+(x^2-4x+4)=0$

$(x+y)^2+(x-2)^2=0$

$x,\ y$가 실수이므로 $x+y=0,\ x-2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=-2$

$\therefore\ xy=-4$

3. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

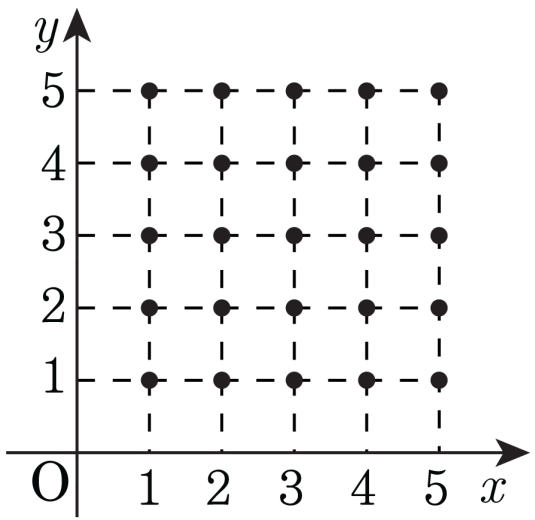
근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k\geq 0$ 곧, $k\leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,

이 중 $D\geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

4. 다음 그림의 격자점 중 $xy+x-2y-2=3$을 만족시키는 점은 모두 몇 개인가?



① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개

④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$xy+x-2y-2=x(y+1)-2(y+1)$

$=(x-2)(y+1)$ 이므로

$(x-2)(y+1)=3$ 에서 문제의 $x,\ y$ 는

i) $x-2=1,\ y+1=3$ 일 때, $x=3,\ y=2$

ii) $x-2=3,\ y+1=1$ 일 때, $x=5,\ y=0$

iii) $x-2=-1,\ y+1=-3$ 일 때, $x=1,\ y=-4$

iv) $x-2=-3,\ y+1=-1$ 일 때,

$x=-1,\ y=-2$

$x,\ y$는 자연수이므로 조건을 만족시키는 점은 $(3,\ 2)$ 뿐이다.

5. $xy-3x-3y+4=0$을 만족하는 양의 정수 x, y의 합 $x+y$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$xy-3x-3y+4=0$에서

$x(y-3)-3(y-3)-5=0$, $(x-3)y-3=5$

$x \geq 1$, $y \geq 1$이므로 $x-3 \geq -2$, $y-3 \geq -2$

(i) $x-3=1$, $y-3=5$일 때, $x=4$. $y=8$

(ii) $x-3=5$, $y-3=1$일 때, $x=8$, $y=4$

따라서, 구하는 값은 $x+y=4+8=8+4=12$

6. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개이고 배점은 80 점이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2 점 문항 개수를 x, 3 점 문항을 y,
4 점 문항을 z라 하자

$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠

$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡

㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow \quad y = 40 - 2x$

㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow \quad z = x - 10$

$\therefore \quad x = 10$이면 $z = 0$

$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음

$\therefore \quad x \geq 11$, 최소 11 문항

7. 방정식 $2x^2+2xy+5y^2+6x+12y+9=0$ 을 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

준식을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$5y^2+2(x+6)y+(2x^2+6x+9)=0$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\frac{D}{4}\geq 0$

$$\frac{D}{4}=(x+6)^2-5(2x^2+6x+9)$$
$$=-9x^2-18x-9=-9(x+1)^2\geq 0$$

따라서 $-9(x+1)^2=0$

$x+1=0$

$\therefore\ x=-1$

준식에 $x=-1$ 을 대입하면

$2-2y+5y^2-6+12y+9=0$

$5y^2+10y+5=0$

$5(y+1)^2=0$

$\therefore\ y=-1$

$\therefore\ x+y=-2$

8. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근이 모두 정수 일 때, 상수 k 의 값의 합은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자

$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = k + 3 \rightarrow \ \alpha + \beta + 3 = \alpha\beta$

$\alpha\beta - \alpha - \beta = 3$

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 4$ α, β 는 정수이므로

$1 \times 4 \Rightarrow \alpha = 2,\ \beta = 5, \quad k = 7$

$2 \times 2 \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 3, \quad k = 6$

$-1 \times -4 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = -3, \quad k = -3$

$-2 \times -2 \Rightarrow \alpha = -1, \beta = -1, \quad k = -2$

$\therefore\ 7 + 6 - 3 - 2 = 8$

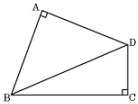
9. 이차방정식 $x^2-(m+4)x+3-2m=0$이 양의 정수근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 10 ③ 13 ④ 17 ⑤ 20

해설

$x^2-(m+4)x+3-2m=0$의 두 근을 α, β $(\alpha \geq \beta)$라 하면
근과 계수와의 관계로부터 $\alpha+\beta=m+4 \cdots$ ①
$\alpha\beta=3-2m \cdots\cdots$ ②
① $\times 2+$ ②를 하면$\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=11$
$\therefore\ (\alpha+2)(\beta+2)=15$
$\alpha+2 \geq 3,\ \beta+2 \geq 3,\ \alpha \geq \beta$이므로
$\alpha+2=5,\ \beta+2=3$
$\therefore\ \alpha=3,\ \beta=1$
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=9+1=10$

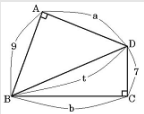
10. 네 변의 길이는 서로 다른 자연수이고, $\overline{AB} = 9$, $\overline{CD} = 7$, $\angle BAD = \angle BCD = 90°$이 사각형 ABCD가 있다. 대각선 BD의 길이를 t라 할 때, t^2의 값을 구하면?



① 83 ② 85 ③ 87 ④ 120 ⑤ 130

해설

$\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{BD} = t$라 할 때,



$9^2 + a^2 = 7^2 + b^2$, $b^2 - a^2 = 32$

(자연수이므로, $b > a$)

$(b-a)(b+a) = 32 \Rightarrow$ 부정방정식

$b > a$이므로

$b-a$, $b+a$ 모두 자연수이므로,

곱이 32가 되는 수의 조합은

$1 \times 32 = 32$, $2 \times 16 = 32$, $4 \times 8 = 32$, $\cdots$

$b - a = 4$, $b + a = 8$일 때 조건이 성립하므로,

$a = 2$, $b = 6$이다.

$b + a = 16$, $b - a = 2$일 때도

성립하나, 서로 다른 자연수 조건에 위배하므로,

$\therefore\ t^2 = 9^2 + 2^2 = 81 + 4 = 85$