

1. x 에 대한 다항식 $3x^3y + 5y - xz + 9xy - 4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- ㉠ 내림차순으로 정리하면 $3yx^3 + (9y - z)x + 5y - 4$ 이다.
㉡ 오름차순으로 정리하면 $5y - 4 + (9y - z)x + 3yx^3$ 이다.
㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3차식이다.
㉣ x^3 의 계수는 3이다.
㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉡

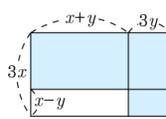
④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉣, ㉤, ㉥

해설

- ㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y - 4$ 이다.

2. 다음 그림의 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 나타내는 식을 세워 전개하였을 때, y^2 항의 계수는?



- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}
 & (x+4y)(3x) - (x+y)(x-y) \\
 &= 3x^2 + 12xy - x^2 + y^2 \\
 &= 2x^2 + 12xy + y^2
 \end{aligned}$$

3. 두 다항식 A, B 에 대하여 $A + B = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5$, $2A - B = 4x^3 - x^2 - x + 1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A = x^3 + x^2 + x + 2$, $B = -2x^3 - 3x^2 + 3x + 3$

② $A = x^3 - x^2 + x + 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 3x + 3$

③ $A = x^3 - x^2 + x - 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 3x + 7$

④ $A = x^3 - x^2 - x + 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 5x + 3$

⑤ $A = 3x^3 - 3x^2 + 3x + 6$, $B = -4x^3 + x^2 + x - 1$

해설

$$A + B = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5 \cdots \text{㉠}$$

$$2A - B = 4x^3 - x^2 - x + 1 \cdots \text{㉡}$$

$$(\text{㉠} + \text{㉡}) \div 3 : A = x^3 - x^2 + x + 2$$

$$(2\text{㉠} - \text{㉡}) \div 3 : B = -2x^3 - x^2 + 3x + 3$$

4. 다항식 $2x^2 + 5ax - a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x + 3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x+a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2 + 2ax - 2a^2$

② $x^2 - a^2$

③ $2x^2 + 3ax + a^2$

④ $2x^2 - 3ax - a^2$

⑤ $2x^2 + ax - a^2$

해설

$2x^2 + 5ax - a^2 = P(x)(x + 3a) + 2a^2$ 이므로

$$P(x)(x + 3a) = 2x^2 + 5ax - 3a^2$$

따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2 + 5ax - 3a^2$ 을 $x + 3a$ 로 나눈 몫이므로

$$P(x) = 2x - a$$

$$\begin{aligned} \therefore (x + a)P(x) &= (x + a)(2x - a) \\ &= 2x^2 + ax - a^2 \end{aligned}$$

5. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^5 - 5x$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$x^5 - 5x$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면
즉, $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1) \times \text{몫} - 3$
 $x^2 + x - 1 = 0$
 $\therefore x^5 - 5x = -3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$$\begin{aligned}x^2 &= -x + 1 \\x^5 - 5x &= (x^2)^2 \times x - 5x \\&= x(-x + 1)^2 - 5x \\&= x^3 - 2x^2 - 4x \\&= x(-x + 1) - 2(-x + 1) - 4x \\&= -x^2 - x - 2 \\&= -(x^2 + x) - 2 \\&= -1 - 2 = -3\end{aligned}$$

6. $x+y+z = 4$, $xy+yz+zx = 1$, $xyz = 2$ 일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 의 값을 구하면?

① 16 ② 8 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} & (xy+yz)(yz+zx)(zx+xy) \text{ 을} \\ & xy+yz+zx = 1 \text{ 을 이용하여 변형하면} \\ & (xy+yz)(yz+zx)(zx+xy) \\ & = (1-zx)(1-xy)(1-yz) \\ & = 1 - (xy+yz+zx) + (x^2yz + xy^2z + xyz^2) - (xyz)^2 \\ & = 1 - (xy+yz+zx) + xyz(x+y+z) - (xyz)^2 \\ & = 1 - 1 + 2 \cdot 4 - 4 \\ & = 4 \end{aligned}$$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$$\begin{aligned} & (x-a)(x-b)(x-c) \\ & = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc \end{aligned}$$

7. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x) + (1+x+x^2+x^3)^3$$

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

- i) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수
: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,
계수= 2
: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x 를 곱할 때,
계수= 1
- ii) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수
 $x+x^2+x^3=Y$ 라 하면,
 $(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$
 $3Y=3x+3x^2+3x^3$
일차항의 계수= 3, 다른 항에는 일차항이 없다.
- i), ii)에서 $2+1+3=6$

8. $\frac{10^{85}}{10^{15} + 10^5} = k \times 10^n$ (단, $0 < k < 10$, n 은 자연수)로 나타낼 때, n 의 값을 구하면?

- ① 72 ② 71 ③ 70 ④ 69 ⑤ 68

해설

$$\frac{10^{85}}{10^{15} + 10^5} = N \text{이라고 하면}$$

$$\frac{10^{85}}{10^{15} + 10^{15}} < N < \frac{10^{85}}{10^{15}}$$

$$\frac{10 \times 10^{84}}{2 \times 10^{15}} < N < \frac{10 \times 10^{84}}{10^{15}}$$

$$5 \times 10^{69} < N < 10 \times 10^{69}$$

$$\text{따라서 } N = k \times 10^{69} (5 < k < 10)$$

$$\therefore n = 69$$

9. A 를 B 로 나눈 몫을 Q , 나머지를 R 라 하고, Q 를 B' 으로 나눈 몫은 Q' , 나머지는 R' 이라 한다. A 를 BB' 으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

- ① $R + R'B$ ② $R' + RB$ ③ RR'
 ④ R ⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면
 $A = BQ + R \dots\dots ㉠$
 $Q = B'Q' + R' \dots\dots ㉡$
 ㉡을 ㉠에 대입하면
 $A = B(B'Q' + R') + R$
 $= (BB')Q' + (R + R'B)$
 $R + R'B$ 가 A 를 BB' 로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R + R'B < BB'$ 이어야 한다.
 그런데 $R \leq B - 1, R' \leq B' - 1$ 이므로
 $R + R'B \leq (B - 1) + (B' - 1)B$
 $= BB' - 1 < BB'$
 따라서 A 를 BB' 으로 나눈 나머지는 $R + R'B$ 이다.

10. 0이 아닌 세수 x, y, z 에 대하여 x, y, z 중 적어도 하나는 6이고, x, y, z 의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$ 일 때, $2(x+y+z)$ 의 값을 구하면?

- ① 6 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

x, y, z 중 적어도 하나가 6이므로,

$$(x-6)(y-6)(z-6) = 0$$

$$\therefore xyz - 6(xy + yz + zx) + 36(x + y + z) - 216 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

또, x, y, z 의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}, \quad \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 6(xy + yz + zx) = xyz \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$36(x + y + z) = 216$$

$$\therefore 2(x + y + z) = 12$$

11. 다항식 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$ 을 만족시킨다. $f(x^2 - 1)$ 을 구한 것은?

- ① $x^4 + 5x^2 + 1$ ② $x^4 + x^2 - 3$ ③ $x^4 - 5x^2 + 1$
④ $x^4 + x^2 + 3$ ⑤ 답 없음

해설

$$\begin{aligned}x^2 + 1 = t \text{라 하면 } x^2 &= t - 1 \\ \text{주어진 식에 대입하면} \\ f(t) &= (t - 1)^2 + 5(t - 1) + 3 \\ \therefore f(t) &= t^2 + 3t - 1 \\ f(x^2 - 1) &= (x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 1 \\ &= x^4 + x^2 - 3\end{aligned}$$

12. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
- ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
- ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
- ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$$\begin{aligned} \frac{a-b+c}{a+b+c} &= \frac{-a-b+c}{a-b-c} \text{에서} \\ (a-b+c)(a-b-c) &= (a+b+c)(-a-b+c) \\ (a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) &= 0 \\ \text{(좌변)} \\ &= \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} \\ &= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 \\ \text{따라서, } 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 &= 0 \text{ 이므로 } a^2 + b^2 = c^2 \\ \text{그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 } c \text{인 직각삼각형이다.} \end{aligned}$$

13. $x^2 - x - 1 = 0$ 일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ 의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때, $\frac{y^{10} + 1}{y^2}$ 의 값은?

- ① 4, -1 ② 4, 18 ③ 8, -1 ④ 9, -1 ⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = 1$$

$$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때

$$y + \frac{1}{y} = 1 \text{ 에서 } \frac{y^2 + 1}{y} = 1$$

$$\therefore y^2 - y + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\text{양변에 } (y+1) \text{ 을 곱하면 } (y+1)(y^2 - y + 1) = 0$$

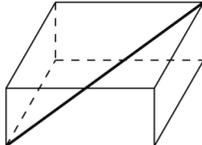
$$y^3 + 1 = 0 \therefore y^3 = -1 \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서

$$\frac{y^{10} + 1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y + 1}{y^2}$$

$$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

14. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겹넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c 라 할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?



- ① 12 ② 18 ③ 21 ④ 23 ⑤ 30

해설

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3, \quad abc = 6, \quad 2(ab + bc + ca) = 16$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$(a + b + c)^2 = 25, \quad a + b + c = 5 (\because a, b, c \text{는 양수})$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \dots \textcircled{1}$$

①에 각각 대입하면

$$a^3 + b^3 + c^3 - 18 = 5 \times (9 - 8)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 23$$

15. $x - y = 1$ 이고 $x^2 + y^2 = -1$ 일 때, $x^{10} + y^{13}$ 의 값은 얼마인가?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$x - y = 1 \text{ 에서 } y = x - 1$$

이것을 $x^2 + y^2 = -1$ 에 대입하면

$$2x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

양변에 $x + 1$ 을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$

$$\therefore x^3 = -1$$

또 $x = y + 1$ 을 $x^2 + y^2 = -1$ 에 대입하면

$$2y^2 + 2y + 2 = 0, y^2 + y + 1 = 0 \therefore y^3 = 1$$

$$\therefore x^{10} + y^{13} = (x^3)^3 \cdot x + (y^3)^4 \cdot y$$

$$= (-1)^3 \cdot x + 1^4 \cdot y$$

$$= -(x - y) = -1$$