

1. 다음 <보기>에서 유한소수가 되는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 3.65

㉡ 0.38888...

㉢ 0.325

㉣ $\frac{3}{8}$

㉤ 1.010010001...

㉥ $\frac{4}{9}$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉣

⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

유한소수는 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 유한개인 소수이므로

㉠ 3.65 ㉢ 0.325 ㉣ $\frac{3}{8}$ 이 해당된다.

2. 다음 설명 중 옳은 것은? (정답 2 개)

- ① 순환소수 중에는 유리수가 아닌 것도 있다.
- ② 유한소수로 나타낼 수 없는 분수는 모두 순환소수이다.
- ③ 분모의 소인수가 2 나 5 뿐인 기약분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.
- ④ 정수가 아닌 유리수는 모두 순환소수이다.
- ⑤ 모든 순환소수는 유한소수이다.

해설

- ① 순환소수는 모두 유리수이다.
- ④ 정수가 아닌 유리수는 유한소수와 순환소수가 있다.
- ⑤ 순환소수는 무한소수이다.

3. 다음 중 틀린 것은?

- ① 0 이 아닌 유리수는 항상 무한소수로 나타낼 수 있다.
- ② 유한소수로 나타낼 수 없는 분수는 모두 순환소수이다.
- ③ 무한소수는 분수로 고칠 수 없다.
- ④ 유한소수는 순환소수로 나타낼 수 있다.
- ⑤ 정수가 아닌 유리수는 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있다.

해설

무한소수중 순환소수는 분수로 고칠 수 있다.

4. $\frac{9 \times 6^n}{4}$ 의 약수의 개수가 77 개일 때, 자연수 n 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 식을 소인수분해하여 간단히 정리하면

$$\begin{aligned}\frac{9 \times 6^n}{4} &= \frac{3^2 \times (2 \times 3)^n}{2^2} \\ &= 2^{-2} \times 2^n \times 3^2 \times 3^n \\ &= 2^{n-2} \times 3^{n+2}\end{aligned}$$

따라서 약수의 개수는

$$(n - 2 + 1)(n + 2 + 1) = (n - 1)(n + 3) = 77 \text{ 이므로}$$

$$n - 1 = 7, n + 3 = 11$$

$$\therefore n = 8$$

5. 다음과 같은 규칙으로 수를 나열하였을 때, 8^8 과 크기가 같은 수는 몇 번 나오는지 구하여라.

1	1	1	1	...
2	4	8	16	...
3	9	27	81	...
4	16	64	256	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

▶ 답 : 번

▷ 정답 : 8 번

해설

$8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$ 으로 나타낼 수 있다.

자연수 m, n 에 대하여 $(2^m)^n = 2^{mn} = 2^{24}$ 일 때, $mn = 24$ 가 되는 순서쌍 (m, n) 은 24 의 약수의 개수만큼 나타난다.

따라서 $24 = 2^3 \times 3$ 에서 24 의 약수의 개수는 $(3+1)(1+1) = 8$ (개) 이므로 8^8 과 크기가 같은 수는 모두 8 번 나온다.

6. 다음과 같은 규칙으로 수를 나열하였을 때, 25^{18} 과 크기가 같은 수는 몇 번 나오는지 구하여라.

1	2	3	4	...
1	2^2	3^2	4^2	...
1	2^3	3^3	4^3	...
1	2^4	3^4	4^4	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

▶ 답 : 번

▷ 정답 : 9 번

해설

$25^{18} = (5^2)^{18} = 5^{36}$ 으로 나타낼 수 있다.

자연수 m, n 에 대하여 $(5^m)^n = 5^{mn} = 5^{36}$ 일 때, $mn = 36$ 이 되는 순서쌍 (m, n) 은 36 의 약수의 개수만큼 나타난다.

따라서 $36 = 2^2 \times 3^2$ 에서 36 의 약수의 개수는 $(2+1) \times (2+1) = 9$ (개) 이므로 25^{18} 과 크기가 같은 수는 모두 9 번 나온다.

7. $\frac{2^{-11} + 2^{-12} + \dots + 2^{-20}}{2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{1024}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{2^{-11} + 2^{-12} + \dots + 2^{-20}}{2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}} \\ &= \frac{2^{-10}(2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10})}{2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}} \\ &= 2^{-10} = \frac{1}{1024} \end{aligned}$$

8. 자연수 n 에 대하여 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 이라고 정의한다. $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times 1000 = x^{500} \times y!$ 일 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 502

해설

$$\begin{aligned} & 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times 1000 \\ &= (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times (2 \times 4) \times \cdots \times (2 \times 500) \\ &= 2^{500} \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 500) \\ &= 2^{500} \times 500! \\ &\therefore x = 2, y = 500 \\ &\therefore x + y = 502 \end{aligned}$$

9. $64 \times 125 \times 256 \times 625$ 는 $n + 1$ 자리 자연수이다. 이 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} 64 \times 125 \times 256 \times 625 &= 2^6 \times 5^3 \times 2^8 \times 5^4 \\ &= 2^7 \times (2 \times 5)^7 \\ &= 2^7 \times 10^7 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식은 $64 \times 125 \times 256 \times 625 = 128 \times 10^7$ 이므로 10 자리의 자연수이다.

$$\therefore n = 9$$

10. 자연수 n 에 대하여 $30^n = x$ 일 때, $(2^n + 2^{n+1}) \times (3^n + 3^{n+2}) \times 5^n$ 을 x 에 관한 가장 간단한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $30x$

해설

$$\begin{aligned} & (2^n + 2^{n+1}) \times (3^n + 3^{n+2}) \times 5^n \\ &= (2^n 3^n + 2^n 2^1 3^n + 2^n 3^n 3^2 + 2^n 2^1 3^n 3^2) \times 5^n \\ &= (2^n 3^n 5^n) + 2 \times (2^n 3^n 5^n) + 9 \times (2^n 3^n 5^n) \\ &\quad + 18 \times (2^n 3^n 5^n) \end{aligned}$$

$$2^n 3^n 5^n = 30^n = x \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \therefore (2^n + 2^{n+1}) \times (3^n + 3^{n+2}) \times 5^n \\ = x + 2x + 9x + 18x = 30x \end{aligned}$$

11. 자연수 n 과 유리수 x, y 에 대하여 $xy = -1$ 일 때, $x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n} + (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$xy = -1 \text{ 이면 } \frac{1}{x} = -y, \frac{1}{y} = -x \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} & x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n} \\ & + (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n} \\ & = x^{2n-1} + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n-1} + y^{2n-1} + \left(\frac{1}{y}\right)^{2n-1} \\ & + (-1)^{2n-1} + (-1)^{1-2n} \\ & = x^{2n-1} + (-y)^{2n-1} + y^{2n-1} + (-x)^{2n-1} \\ & + (-1)^{2n-1} + (-1)^{1-2n} \end{aligned}$$

자연수 n 에 대하여 $2n-1$ 은 홀수이므로

$$\begin{aligned} \therefore & x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n} \\ & + (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n} \\ & = x^{2n-1} - y^{2n-1} + y^{2n-1} - x^{2n-1} - 1 - 1 \\ & = -2 \end{aligned}$$