1. <보기> 집합 사이의 포함 관계 중 옳지 않은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $A \subset A$

㉡ $A \subset B,\ C \subset B$이면 $A \neq C$

㉢ $A \not\subset B,\ B \subset C$이면 $A \not\subset C$

㉣ $A \subset B,\ B \subset C,\ C \subset A$이면 $A = B = C$

㉤ $A \subset B,\ B \subset C,\ C \not\subset D$이면 $A \not\subset D$

① ㉠, ㉡, ㉢　　② ㉠, ㉢, ㉣　　③ ㉠, ㉡, ㉤

④ ㉡, ㉢, ㉤　　⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ 부분집합의 정의로부터 $A \subset A$ 는 옳다. (참)

㉡ 먼저 B 를 그린 다음, $A \subset B$ 이고 $C \subset B$ 이도록 A 와 C 를 그렸을 때 항상 $A \neq C$ 인지 알아보면 다음 [그림1]에서 그렇지 않음을 알 수 있다. (거짓)

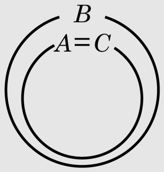


그림 1

㉢ 먼저 B 를 그린 다음, $A \not\subset B$ 이고 $B \subset C$ 이도록 A 와 C 를 그렸을 때 항상 $A \not\subset C$ 인지 알아보면 다음 [그림2]에서 그렇지 않음을 알 수 있다. (거짓)

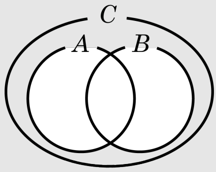


그림 2

㉣ $A \subset B, B \subset C$이면 $A \subset C$

이때, $C \subset A$ 이므로 $A = C \cdots$㉠

또한, $B \subset C,\ C \subset A$이면 $B \subset A$

이때, $A \subset B$ 이므로 $A = B \cdots$㉡

㉠, ㉡으로부터 $A = B = C$

따라서 $A \subset B,\ B \subset C,\ C \subset A$이면 $A = B = C$ 이다. (참)

㉤ 먼저 B 를 그린 다음, $A \subset B$, $B \subset C$ 이도록 A 와 C 를 그리고, $C \not\subset D$ 이도록 D 를 그렸을 때 항상 $A \not\subset D$ 인지 알아보면 다음 [그림3]에서 그렇지 않음을 알 수 있다. (거짓)

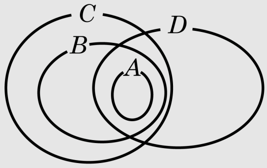


그림 3

2. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{2,\ 3\}$ 일 때, $A^c, A-B$ 는?

① $A^c=\{1\}$, $A-B=\{1,3\}$
② $A^c=\{1,3\}$, $A-B=\{2,4\}$
③ $A^c=\{2,4\}$, $A-B=\{1,5\}$
④ $A^c=\{3\}$, $A-B=\{1,5\}$
⑤ $A^c=\{2,4\}, A-B=\{1,3\}$

해설

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 이므로 $A^c=\{2,4\}$ 이고 $A-B=\{1,5\}$ 이다.
따라서 ③이다.

3. 전체집합 U 의 부분집합 A 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A \cap B^c = A - B$

② $A^c = U - A$

③ $A \cap \varnothing = A$

④ $A \cap U = A$

⑤ $A \cup U = U$

해설

③ $A \cap \varnothing = \varnothing$

4. 혜진이네 반에서 독서동아리에 가입한 학생은 10 명, 댄스동아리에 가입한 학생은 13 명, 댄스동아리만 가입한 학생은 8 명이다. 독서동아리와 댄스동아리를 모두 가입한 학생 수와 독서동아리나 댄스동아리에 가입한 학생 수를 각각 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

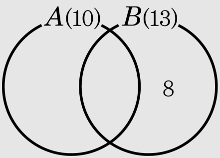
▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 모두 가입한 학생 수 5 명

▷ 정답 : 하나 가입한 학생 수 18 명

해설

독서동아리에 가입한 학생들의 모임을 A, 댄스동아리에 가입한 학생들의 모임을 B 라고 할 때, 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



(독서동아리와 댄스동아리를 모두 가입한 학생 수) $= n(A \cap B) = n(B) - 8 = 13 - 8 = 5$ (명)

(독서동아리나 댄스동아리에 가입한 학생 수)

$= n(A \cup B)$

$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 10 + 13 - 5 = 18$(명)

5. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$

② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$

④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$

$f(a)+f(b)=|a|+|b|$

이 때 $|a+b|\le|a|+|b|$

② $f(a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$

$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

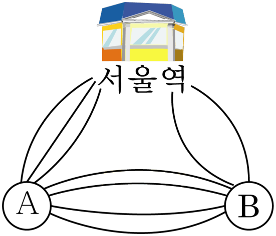
③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$

$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤
$$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3) \\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b \\ &= a^3+b^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3) \end{aligned}$$

6. 지점 A 에서 서울역으로 가는 길은 3 가지, 서울역에서 지점 B 로 가는 길은 2 가지가 있다. 또, A 에서 서울역을 거치지 않고 B 로 가는 길은 4 가지이다. 서울역을 한 번만 거쳐서 A와 B를 왕복하는 방법의 수를 구하시오.(단, A 에서 출발한다.)



▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 48 가지

해설

(i) $A \rightarrow$ 서울역 $\rightarrow B \rightarrow A$

: $3 \times 2 \times 4 = 24$ (가지)

(ii) $A \rightarrow B \rightarrow$ 서울역 $\rightarrow A$

: $4 \times 2 \times 3 = 24$ (가지)

(i), (ii) 이므로

$24 + 24 = 48$ (가지)

7. 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 7 개의 점이 있을 때, 점을 연결하여 만들 수 있는 직선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 21 개

해설

$_7C_2 = 21$

8. 다음 중 명제 '$ab = |ab|$ 이면 $a \geq 0$ 이고 $b \geq 0$ 이다.' 가 거짓임을 보여주는 반례로 알맞은 것은?

① $a = 2, b = 2$

② $a = -3, b = -1$

③ $a = \frac{1}{2}, b = 1$

④ $a = -1, b = 1$

⑤ $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}$

해설

$a = -3,\ b = -1$ 이면 $ab = |ab|$ 이지만 $a \geq 0,\ b \geq 0$ 은 아니다.

9. 함수 $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$ 는 그 정의역과 치역이 같다고 한다. a의 값은? (단, $x \neq -\dfrac{3}{2}$)

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

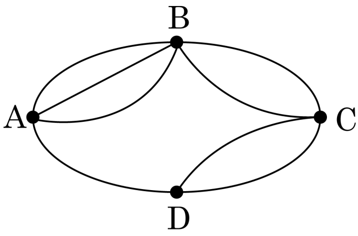
해설

$y=\dfrac{ax}{2x+3}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{-\frac{3}{2}a}{2x+3}$ 이므로 치역은

$y \neq \dfrac{a}{2}$ 인 실수이다.

$\therefore \dfrac{a}{2}=-\dfrac{3}{2}$, 곧 $a=-3$

10. 네 개의 도시 A, B, C, D 사이에는 아래 그림과 같은 도로가 있다. A 를 출발하여 모든 도시를 한번 씩만 거치고, 다시 A 로 돌아오는 방법의 수는?

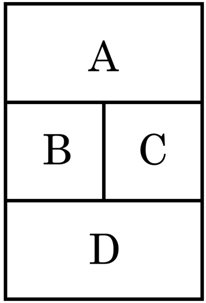


① 26 ② 24 ③ 20 ④ 16 ⑤ 12

해설

$A-B$ 도로의 가지 수 : 3 가지
$B-C$ 도로의 가지 수 : 2 가지
$C-D$ 도로의 가지 수 : 2 가지
$D-A$ 도로의 가지 수 : 1 가지
(i) $A \to B \to C \to D \to A$ 인 경우
$3 \times 2 \times 2 \times 1 = 12$
(ii) $A \to D \to C \to B \to A$ 인 경우
$1 \times 2 \times 2 \times 3 = 12$
그런데 (i)과 (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙을 이용하여
$\therefore 12 + 12 = 24$ (가지)

11. 원재가 가입한 동아리는 이 동아리를 상징하는 깃발을 검정, 초록, 빨강의 세 가지 색을 모두 사용하여 다음 그림과 같은 네 영역으로 구분하여 칠하려고 한다. 서로 다르게 칠하는 방법의 수를 구하여라.



▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 6 가지

해설

A, B, C, D 의 순서대로 색을 칠한다고 할 때, A 의 영역을 칠하는 방법의 수는 검정, 초록, 빨강의 3 가지이다. 이런 각 경우에 대하여 B 의 영역을 칠하는 방법은 3 가지 색 중에서 A 의 영역을 칠한 색을 제외한 2 가지이고, C 의 영역을 칠하는 방법의 수는 A, B 의 두 영역을 칠한 색을 제외한 1 가지이다.
마지막으로 D 의 영역을 칠하는 방법의 수는 B, C 의 두 영역을 칠한 색을 제외한 1가지 방법이다. 따라서 구하는 방법의 수는
$3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ (가지)

12. 다음은 서로 다른 n개에서 서로 다른 r개를 꺼내어 일렬로 배열하는 방법의 수를 구하는 과정이다.

> (ⅰ) n개에서 특정한 1개를 뺀 나머지에서 r개를 꺼내어 배열한다.
> (ⅱ) n개에서 특정한 1개를 포함하여 r개를 꺼내어 배열한다.
> (ⅰ), (ⅱ)는 배반이므로,
> $\therefore {}_nP_r = \boxed{(가)} + \boxed{(나)}$

위의 과정에서 $\boxed{(가)}$, $\boxed{(나)}$에 들어갈 알맞은 식은?

① (가): ${}_{n-1}P_r$, (나): ${}_{n-1}P_{r-1}$

② (가): ${}_{n-1}P_r$, (나): ${}_nP_{r-1}$

③ (가): ${}_nP_r$, (나): ${}_{n-1}P_{r-1}$

④ (가): ${}_{n-1}P_r \times r$, (나): ${}_{n-1}P_{r-1}$

⑤ (가): ${}_{n-1}P_r$, (나): ${}_{n-1}P_{r-1} \times r$

해설

(ⅰ)에서 ${}_{n-1}P_r$←(가)
(ⅱ) 에서 특정한 1개를 포함시켜 r개를 꺼내려면
$n-1$개에서 $r-1$개를 꺼내어 배열한 다음
(${}_{n-1}P_{r-1}$), 특정한 1개를 다시 이것들과 배열시키는 것을 생각한다.
따라서 ${}_{n-1}P_{r-1} \times r$←(나)

13. 남학생 4 명과 여학생 2 명을 일렬로 세울 때, 여학생끼리 이웃하여 서는 방법은 몇 가지인가?

① 60 가지　② 120 가지　③ 180 가지
④ 240 가지　⑤ 300 가지

해설

4 명의 남학생과 2 명의 여학생 중에서 여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 5 명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!$ 이고, 묶음 안에서 여학생 2 명이 자리를 바꾸는 방법의 수가 2 가지이므로, 구하는 경우의 수는, $5! \times 2 = 240$ (가지) 이다.

14. $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 의 6 개의 숫자를 사용하여 만든 6 자리의 수 중에서 5 의 배수의 개수는?

① 64 개 ② 128 개 ③ 144 개

④ 216 개 ⑤ 256 개

해설

5 의 배수는 일의 자리에 0 이 오거나 5 가 온다.

(i) 일의 자리가 0 인 수의 개수는
나머지 다섯 자리에 $1, 2, 3, 4, 5$ 를 배열하는 순열의 수와 같으므로 $5! = 120$

(ii) 일의 자리가 5 인 수의 개수는
맨 앞에는 0 이 올 수 없으므로 $4 \times 4! = 96$

(i), (ii) 에서 구하는 5 의 배수의 개수는
$120 + 96 = 216$

15. silent의 6개의 문자를 일렬로 배열할 때, 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는?

① 36 ② 72 ③ 144 ④ 288 ⑤ 432

해설

전체의 경우의 수에서 양쪽 끝 모두 자음이 오는 경우의 수를 빼준다.

$6! - {}_4P_2 \times 4! = 432$

16. 자연수 n 에 대하여 ${}_{n+3}C_3 + \frac{{}_{n+3}C_2}{3} = \frac{32}{3}(n+3)$ 이 성립할 때, n 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $n = 6$

해설

$${}_{n+3}C_3 = \frac{{}_{n+3}P_3}{3!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6},$$

$${}_{n+3}C_2 = \frac{{}_{n+3}P_2}{2!} = \frac{(n+2)(n+3)}{2},$$

${}_{n+3}C_3 + \frac{{}_{n+3}C_2}{3} = \frac{32}{3}(n+3)$ 에서

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} + \frac{(n+2)(n+3)}{6} = \frac{32}{3}(n+3)$$

양변에 $\frac{6}{n+3}$ 을 곱하여 정리하면

$n^2 + 4n - 60 = 0$, $(n-6)(n+10) = 0$

$\therefore n = 6$

17. $X=\{1,2,3\}$ 에서 $Y=\{a,b,c,d,e\}$ 로 대응되는 함수 중 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 인 함수의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ＿＿＿＿ 개

▷ **정답 :** 10 개

해설

Y 의 원소 5 개 중 X 의 원소 1, 2, 3 에 대응될 원소 3 개를 뽑으면 된다.

${}_5C_3 = 10$

18. 서로 다른 6 개의 찻잔을 서로 다른 찻잔 보관용 상자 2 개에 나누어 담으려고 한다. 각 상자마다 찻잔을 최대 4 개까지 담을 수 있을 때, 찻잔을 담는 방법의 수는?

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

해설

6 개를 (4개, 2개) 또는 (3 개,3 개) 로 나누어서
2 개의 찻잔 보관용 상자에 나누어 담으면 되므로
(i) 4 개, 2 개로 나누어 담는 방법의 수는

$${}_6C_4 \times {}_2C_2 \times 2! = 30 \text{ (가지)}$$

(ii) 3 개, 3 개로 나누어 담는 방법의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 2! = 20 \text{ (가지)}$$

(i), (ii) 에 의하여 구하는 방법의 수는
$30 + 20 = 50$ (가지)

19. 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 세 자연수의 합을 구하여라.

보기

㉠ $n\left(\left\{x \mid x\text{는 } \boxed{}\text{미만의 자연수}\right\}\right)=4$

㉡ $n(\{a,\ b,\ c,\ d\})-n(\{b,\ c,\ d\})=\boxed{}$

㉢ $A\subset\{1,\ 2,\ 3\}$ 이고, $n(A)=2$ 를 만족하는 집합 A의 개수는 $\boxed{}$ 개이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

㉠ $n\left(\left\{x \mid x\text{는 } 5\text{ 미만의 자연수}\right\}\right)=4$

㉡ $n(\{a,\ b,\ c,\ d)-n(\{b,\ c,\ d\})=1$

㉢ $A\subset\{1,\ 2,\ 3\}$ 이고, $n(A)=2$ 를 만족하는 집합 A 는 $\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\}$ 의 3 개

$\therefore 5+1+3=9$

20. 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건인 것은 ?

① $p: a+b>0,\ ab>0,\ q: a>0,\ b>1$

② $p: \frac{a}{b}>1,\ q: a>b>1$($a,\ b$ 는 실수)

③ $p: a+b>2$, $q: a\geq 1$ 또는 $b\geq 1$ ($a,\ b$는 실수)

④ $p: ab=0,\ |a|+|b|=0$

⑤ $p: a+b\geq 2,\ ab\geq 1,\ Q: a\geq 1,\ b\geq 1$

해설

① 반례 : $a=2+i,\ b=2-i$ 이면

$a+b=4>0,\ ab=5>0$

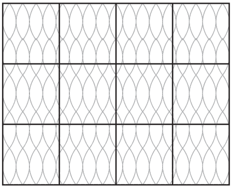
$\therefore$ 필요조건

② 반례 : $a=-2,\ b=-1$ 이면

$\frac{a}{b}=\frac{-2}{-1}=2>1$

$\therefore$ 필요조건

21. 어떤 농부가 길이 120 m 인 철망을 가지고 아래 그림과 같이 열두 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 최대넓이를 구하여라.



① $120\,\mathrm{m}^2$　② $180\,\mathrm{m}^2$　③ $240\,\mathrm{m}^2$

④ $300\,\mathrm{m}^2$　⑤ $360\,\mathrm{m}^2$

해설

전체의 가로를 x, 세로를 y라 하면

$4x+5y=120$

넓이 : xy

$4x+5y=120 \geq 2\sqrt{4x \cdot 5y}$

$60 \geq \sqrt{20xy}$, $3600 \geq 20xy$

$\therefore 180 \geq xy$

따라서 넓이의 최대값은 180

해설

$$
\begin{aligned}
xy &= x \times \frac{1}{5}(120-4x) \\
&= -\frac{4}{5}x^2+24x \\
&= -\frac{4}{5}(x^2-30x+225-225) \\
&= -\frac{4}{5}(x-15)^2+180
\end{aligned}
$$

$x=15(\mathrm{m})$, $y=12(\mathrm{m})$ 일 때,

최대넓이는 $180\,\mathrm{m}^2$

22. $a > 1$일 때, $\frac{1}{a-1} + 4a - 3$의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

23. $\dfrac{3x^2-2xy}{x^2+xy+y^2}=2$일 때, $\dfrac{3(x-y)}{x+y}$의 값을 구하면? (단, $x>y>0$)

① $2\sqrt{6}+3$ ② $2\sqrt{6}-3$ ③ $3-2\sqrt{6}$

④ $3+2\sqrt{6}$ ⑤ $5-6\sqrt{2}$

해설

$3x^2-2xy=2x^2+2xy+2y^2$

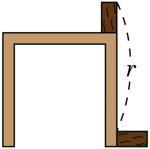
$\therefore x^2-4xy-2y^2=0$ 이 식의 양변을 y^2으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-4\left(\frac{x}{y}\right)-2=0$$

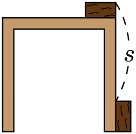
$\therefore \dfrac{x}{y}=2+\sqrt{6}$ $\left(\because\ x>y>0\text{에서 } \dfrac{x}{y}>1\right)$

$$\therefore \frac{3(x-y)}{x+y}=\frac{3\left(\frac{x}{y}-1\right)}{\frac{x}{y}+1}=2\sqrt{6}-3$$

24. 탁자의 높이를 재기 위하여 그림과 같이 크기가 같은 2개의 나무 블럭을 쌓아 보았더니 [그림1]의 높이 r은 32이었고, [그림2]의 높이 s는 28이었다. 이 탁자의 높이는?



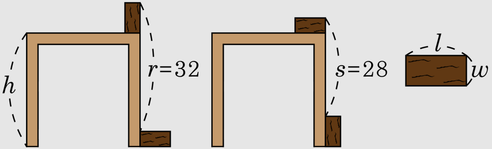
[그림1]



[그림2]

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

해설



책상의 높이를 h, 나무토막의 길이를 l, 폭을 w라 하자.

$l+h-w=32,\ w+h-l=28$

두 식을 더하면 $2h=60$

$\therefore\ h=30$

25. 함수 $f_1(x)=\dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1}=f_1\circ f_n(n=1,2,3,\cdots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{5}{2}$ ③ $-\dfrac{4}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$f_1(x)=\dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에서 $f_1(1)=-\dfrac{5}{2}$

$f_2(1)=(f_1\circ f_1)(1)=f_1\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

$=\dfrac{-\dfrac{10}{2}+3}{\dfrac{5}{2}-1}=-\dfrac{4}{3}$

$f_3(1)=(f_1\circ f_2)(1)=f_1\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{-\dfrac{8}{3}+3}{\dfrac{4}{3}-1}=1$

$f_4(1)=(f_1\circ f_3)(1)=f_1(1)=-\dfrac{5}{2}$

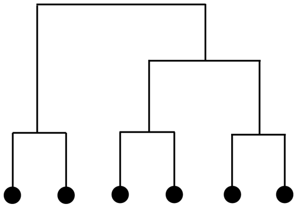
$\therefore f_4=f_1,\ f_5=f_2,\ f_6=f_3,\cdots$

$\therefore f_{3n+1}=f_1,\ f_{3n+2}=f_2,\ f_{3n}=f_3$

$100=3\times 33+1$ 이므로

$\therefore\ f_{100}(1)=f_1(1)=-\dfrac{5}{2}$

26. 6 개의 학급이 참가한 줄다리기 대회의 대진표가 그림과 같을 때, 대진표를 작성하는 방법의 수는?



① 30　② 45　③ 55　④ 60　⑤ 65

해설

먼저 6 개팀 중 4 개의 팀을 고른다. $\Rightarrow {}_6C_2 = 15$

선택한 4 개의 팀을 각각 두개의 조로 나눈다.

$\Rightarrow {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \dfrac{1}{2!} = 3$

$\therefore 15 \times 3 = 45$

27. 실수 전체의 두 부분 집합 A, B 가 두 조건

> · $1 \in A$
> · $x \in A$ 이면 $x+1 \in A$ 이고 $x-1 \in B$

를 만족할 때, 다음<보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면?

보기

> ㉠ A 는 모든 자연수를 원소로 갖는다.
>
> ㉡ A 의 원소는 모두 B 의 원소이다.
>
> ㉢ B 는 최대 원소를 갖는다.
>
> ㉣ B 는 정수 전체 집합의 부분집합이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉡, ㉢ ③ ㉠, ㉡, ㉣
④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $x \in A$ 이면 $x+1 \in A$ 이고 $1 \in A$ 이므로 $1+1=2 \in A$, $2+1=3 \in A$, $\cdots$
$\therefore A \supset \{1, 2, 3, \cdots\}$ (참)
㉡ $x \in A \rightarrow x+1 \in A \rightarrow (x+1)-1 \in B$
$\therefore$ $x \in A \rightarrow x \in B$ (참)
㉢ $B \supset \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ 따라서 B는 무한 집합이므로 최대 원소는 없다.
㉣ $\frac{1}{2} \in A$ 이면 B에는 정수가 아닌 원소가 들어 있게 되므로 거짓이다.(조건에서 $1 \in A$라고 해서 1이외의 수가 A의 원소가 될 수 없다는 의미는 아니다.)

28. 전체집합 U 의 부분집합인 집합 A, B, C 의 원소의 개수는 각각 9 개, 10 개, 11 개이다. $(A-B)\cup(B^c\cup C)^c=\varnothing$ 일 때, $n(B\cap C)-n(A\cup B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(A-B)\cup(B^c\cup C)^c=\varnothing$ 이므로

$A-B=\varnothing \to A\subset B$

$(B^c\cup C)^c=\varnothing \to B-C=\varnothing \to B\subset C$

$\therefore n(B\cap C)-n(A\cup B)=n(B)-n(B)=0$

29. 집합 $A = \{x|x$는 20보다 작은 2의 배수$\}$, $B = \{x|x$는 20보다 작은 4의 배수$\}$가 있다.
이 때, $X-A=\varnothing$, $X\cap B=\varnothing$를 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

▶ 답: ________ 개

▷ 정답: 32 개

해설

$A = \{x|x$는 20보다 작은 2의 배수$\} = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$
$B = \{x|x$는 20보다 작은 4의 배수$\} = \{4,8,12,16\}$
$X-A=\varnothing \Rightarrow X\subset A$, $X\cap B=\varnothing \to$ 집합 X는 원소 $4,8,12,16$을 반드시 포함하지 않는다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^{9-4}=32$ (개)

30. A, B, C 세 학생 중 한 명이 지각을 하였다. 다음은 누가 지각을 했는가에 대한 서로의 주장이다.

A: 내가 지각을 하였다. B: A의 말은 진실이다. C: B는 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

세 사람 중 한 사람만이 진실을 말하고 있다고 할 때, 위의 진술에서 진실을 말하고 있는 학생과 지각을 한 학생을 차례대로 나열하면?

① A, A ② A, B ③ B, C ④ C, A ⑤ C, B

해설

(i) A가 진실을 말한 경우 B는 거짓말을 한 것이었고 A의 말이 진실이 아닌 것이 되어 모순이다.

(ii) B가 진실을 말한 경우 A는 거짓말을 한 것이고, 이는 B의 말과 모순이다.

(iii) C가 진실을 말한 경우 A, B는 모두 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

따라서, 진실을 말한 학생은 C이고, 지각한 학생은 B이다.

31. 비례식 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}(\neq 1)$가 성립할 때, 다음 등식 중 성립하는 것의 개수를 구하면? (단, $mb+nd\neq 0, b+d+f\neq 0$)

㉠ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ ㉡ $\frac{2a+3b}{a-b}=\frac{2c+3d}{c-d}$ ㉢ $\frac{a}{b}=\frac{ma+nc}{mb+nd}$ ㉣ $\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$ ㉤ $\frac{a^3}{b^2}+\frac{c^3}{d^2}+\frac{e^3}{f^2}=\frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2}$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$로 놓으면

$a=bk,\ c=dk,\ e=fk$

㉠ (좌변)$=\frac{bk+b}{bk-b}=\frac{k+1}{k-1}$

(우변)$=\frac{dk+d}{dk-d}=\frac{k+1}{k-1}$

∴ (좌변)= (우변)

㉡ (좌변)$=\frac{2bk+3b}{bk-b}=\frac{2k+3}{k-1}$

(우변)$=\frac{2dk+3d}{dk-d}=\frac{2k+3}{k-1}$

∴ (좌변)= (우변)

㉢ (좌변)$=\frac{bk}{b}=k$

(우변)$=\frac{mbk+ndk}{mb+nd}=k$

∴ (좌변)= (우변)

㉣ (좌변)$=\frac{bk\cdot b+dk\cdot d}{bk\cdot b-dk\cdot d}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

(우변)$=\frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k^2-d^2k^2}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

∴ (좌변)= (우변)

㉤ (좌변)$=\frac{b^3k^3}{b^2}+\frac{d^3k^3}{d^2}+\frac{f^3k^3}{f^2}=(b+d+f)k^3$

(우변)$=\frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^2}=(b+d+f)k^3$

∴ (좌변)= (우변)

따라서, ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 모두 성립한다.

32. a가 실수일 때, 다음 식이 성립하기 위한 a값의 범위를 구하면?

$$a\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2-1}$$

① $a > 0$

② $a \geq 1$

③ $a = -1$ 또는 $a \geq 1$

④ $a \geq 1$ 또는 $a \leq -1$

⑤ $a > 1$ 또는 $a < -1$

해설

좌변 $= a\sqrt{\frac{a^2-(1)^2}{(a)^2}} = \frac{a}{|a|}\sqrt{a^2-1}$

$\therefore \frac{a}{|a|}\sqrt{a^2-1} = \sqrt{a^2-1}$ 에서

$\sqrt{a^2-1}\left(\frac{a}{|a|}-1\right) = 0$ 이므로

$\sqrt{a^2-1} = 0$ 또는 $\frac{a}{|a|} = 1$

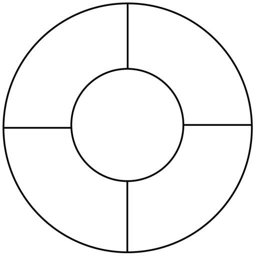
$\therefore a = \pm 1$ 또는 $a > 0 \cdots$ ㉠

한편 근호 안의 값은 양수이므로

$a^2-1 \geq 0$ 으로부터 $a \geq 1$ 또는 $a \leq -1 \cdots$ ㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡에서 $a = -1$ 또는 $a \geq 1$

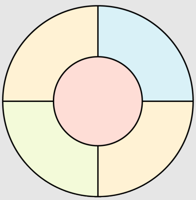
33. 다음의 원형 판에 서로 다른 4 가지의 색을 칠하려고 한다. 접한 부분은 서로 다른 색을 칠하고, 4 가지 색을 모두 사용한다고 할 때, 칠하는 방법의 수는? (단 회전해서 같은 모양이 나오면 같다고 생각한다.)



① 12 ② 16 ③ 20 ④ 23 ⑤ 24

해설

접한 곳은 다른 색을 칠하고 4 가지 색을 모두 사용하기 위해서는 서로 마주 보는 부분 1 쌍은 항상 같은 색이어야 한다.



또한 서로 다른 색인 마주보는 1 쌍은 서로 자리를 바꾸어도 같은 경우가 되므로, 가운데 부분부터 선택할 수 있는 각 색의 수는

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$$

$\therefore$ 12 가지