1. 다음 두 다항식 A, B에 대하여 $A-B$를 구하면?

$$A = 2y^2 + x^2 - 3xy,\ B = -4x^2 - 2xy + 5y^2$$

① $5x^2 - 2xy + 3y^2$
② $5x^2 - xy - 3y^2$
③ $5x^2 + xy + 3y^2$
④ $5x^2 + 2xy - 3y^2$
⑤ $5x^2 + 3xy + 3y^2$

해설

동류항끼리 계산해 준다.

$$\begin{aligned} A - B &= (2y^2 + x^2 - 3xy) - (-4x^2 - 2xy + 5y^2) \\ &= 5x^2 - xy - 3y^2 \end{aligned}$$

2. 등식 $x^2+2x+3=a(x-1)^2+bx+c$가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 정할 때, $a+b+c$의 값은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

우변을 전개하여 동류항으로 묶는다.

$$\begin{aligned} x^2+2x+3 &= a(x-1)^2+bx+c \\ &= ax^2+(b-2a)x+a+c \end{aligned}$$

$a=1,\ b-2a=2,\ a+c=3$

$a=1,\ b=4,\ c=2$

$a+b+c=7$

3. x^4-6x^2+8를 인수분해하면? (단, 유리수 범위에서 인수분해 하여라.)

① $(x^2-2)(x^2-4)$
② $(x^2-2)(x-4)(x+4)$
③ $(x^2-2)(x-2)(x+2)$
④ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)(x+2)$
⑤ $(x^2-\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4-6x^2+8 &= (x^2)^2-6x^2+8 \\ &= (x^2-2)(x^2-4) \\ &= (x+2)(x-2)(x^2-2) \end{aligned}$$

해설

인수정리를 이용할 수 있다.
$f(x)=x^4-6x^2+8$
$f(2)=0,\ \ f(-2)=0,$
즉, $(x-2)(x+2)$로 나누어 떨어지므로
조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

4. $2012 = k$라 할 때, 2013×2011을 k로 나타내면?

① $k^2 + k$　　② $k^2 - 1$　　③ $k^2 + k + 1$
④ $k^2 - k + 1$　　⑤ $k^2 - k$

해설

$$\begin{aligned} 2013 \times 2011 &= (k+1)(k-1) \\ &= k^2 - 1 \end{aligned}$$

5. $\dfrac{3+4i}{1+3i}$ 를 $a+bi$ 의 꼴로 나타 낼 때, $a-b$ 의 값은? (단, a , b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

분모의 실수화를 해준다.

$\dfrac{3+4i}{1+3i}=\dfrac{(3+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$

$\therefore a-b=2$

6. $\alpha = 1+i, \beta = 1-i$ 일 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ 의 값은?

① i ② $-i$ ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1-i)^2+(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{(1-2i+i^2)+(1+2i+i^2)}{1-i^2} \\ &= \frac{2+2i^2}{1-(-1)} = \frac{2-2}{2} = 0\end{aligned}$$

7. 이차방정식 $2x^2-4x-3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

근과 계수와의 관계로부터

$\alpha+\beta=2 \quad \alpha\beta=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7$

8. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$ ② $1 < k < 3$
③ $k < 3$ ④ $3 < k < 5$
⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$

$k^2 - 6k + 5 > 0, \ (k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

9. $(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$를 전개했을 때, x^2과 x^3의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$
$=x^5+bx^4+(a+2)x^3+(ab+2)x^2+(2a+2b)x+4$
(x^2의 계수)=(x^3의 계수)=0이므로
$ab+2=0,\ a+2=0$
따라서 $a=-2,\ b=1$
$\therefore a+b=-1$

10. 등식 $x^2-2x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2$이 x에 관한 항등식일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$x^2-2x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2$
$x=1$을 대입하면 $2=a$ ······①
$x=0$을 대입하면 $3=a-b+c$ ······②
$x=2$를 대입하면 $3=a+b+c$ ······③
①을 ②, ③에 대입하여 정리하면
$b-c=-1$, $b+c=1$
두 식을 연립하면 $b=0$, $c=1$
$\therefore a^2+b^2+c^2=4+0+1=5$

11. 다항식 x^3+ax+b가 다항식 x^2-x+1로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
$x^2=x-1$을 대입하면
$ax+(b-1)=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로,
$a=0,\ b-1=0$
$\therefore\ a=0,\ b=1$
$\therefore a+b=1$

해설

x^3+ax+b
$=(x^2-x+1)Q(x)$
$=(x^2-x+1)(x+b)$
$\therefore\ b=1,\ a=0$

12. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$㉠
$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하면,
$m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

13. x 에 대한 다항식 $4x^3-3x^2+ax+b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -37

해설

$P(x)=4x^3-3x^2+ax+b$ 라 하고 $P(x)$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면

$P(-1)=P(3)=0$

$P(-1)=-4-3-a+b=0 \quad \therefore\ a-b=-7$

$P(3)=108-27+3a+b=0 \quad \therefore\ 3a+b=-81$

$\therefore\ a=-22,\ b=-15$

14. $a^2b+b^2c-b^3-a^2c$을 인수분해하면?

① $(a+b)(a-b)(b+c)$　② $(a-b)(b-c)(c+a)$
③ $(a-b)(a+b)(b-c)$　④ $(a-b)(a+b)(c-a)$
⑤ $(a-b)(b+c)(c-a)$

해설

$a^2b+b^2c-b^3-a^2c$
$=a^2(b-c)-b^2(b-c)$
$=(a-b)(a+b)(b-c)$

15. 두 다항식 $2x^2+2x-4$와 $4x^3-4$에 관한 설명이다. 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① 두 다항식은 $(x-1)$로 나누어 떨어지므로, $(x-1)$은 두 다항식의 공약수이다.
② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.
③ $4(x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)$은 두 다항식의 공배수이다.
④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x-1)$이다.
⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)$이다.

해설

$2x^2+2x-4=2(x-1)(x+2)$
$4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$
최대공약수 : $2(x-1)$
최소공배수 : $4(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$

16. 등식 $\dfrac{a}{1+i}+\dfrac{b}{1-i}=-5$를 만족하는 두 실수 $a+b$의 값을 구하시오
(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면
$a(1-i)+b(1+i)=-10$, $(a+b)+(b-a)i=-10$
$\therefore a+b=-10$, $b-a=0$

17. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = \boxed{㉠} \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}}$$
$$= \boxed{㉡} \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}}$$
$$= \boxed{㉢} \frac{\sqrt{-16}}{2}$$
$$= \boxed{㉣} \frac{4i}{2}$$
$$= \boxed{㉤} = \sqrt{-4}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$
따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

18. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5　　② $\sqrt{29}$　　③ $\sqrt{33}$　　④ 6　　⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c라 하면

$2(ab+bc+ca)=52$

$4(a+b+c)=36 \;\rightarrow\; a+b+c=9$

(직육면체 대각선의 길이)

$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$= \sqrt{(a+b+c+)^2-2(ab+bc+ca)}$

$= \sqrt{81-52} = \sqrt{29}$

19. 다음 중 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$의 인수인 것은?

① $2x + y - 2$　② $2x - y + 2$　③ $x - y + 1$
④ $x + y - 1$　⑤ $x - 2y - 1$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리하면
$2x^2 - (y+4)x - y^2 + y + 2$
$= 2x^2 - (y+4)x - (y+1)(y-2)$
$= \{2x + (y-2)\}\{x - (y+1)\}$
$= (2x + y - 2)(x - y - 1)$

20. 다음 이차방정식을 풀면?

$$(1-i)x^2+(1+i)x-2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-i$　② $x=-1$ 또는 $x=-1-i$

③ $x=-1$ 또는 $x=-1+i$　④ $x=1$ 또는 $x=-1-i$

⑤ $x=1$ 또는 $x=-1+i$

해설

x^2 의 계수를 실수로 만들기 위해 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)^2x-2(1+i)=0$

$2x^2+2ix-2(1+i)=0$

$(x-1)\left\{x+(1+i)\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1-i$

21. $0 < x < 2$일 때, 방정식 $2x^2 - x - 3[x] = 0$의 모든 해의 합은?(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$2x^2 - x - 3[x] = 0$에서 $0 < x < 2$이므로

(i) $0 < x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로

$2x^2 - x = 0$, $x(2x-1) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = \frac{1}{2}$

그런데 $0 < x < 1$이므로 $x = \frac{1}{2}$

(ii) $1 \le x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로

$2x^2 - x - 3 = 0$, $(x+1)(2x-3) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $\frac{3}{2}$

그런데 $1 \le x < 2$이므로 $x = \frac{3}{2}$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

22. 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프가 점 $(-1, 4)$를 지나고 직선 $y=2x-2$와 접할 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, $ab<0$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프가
점 $(-1, 4)$를 지나므로
$4=a-b\cdots$ ㉠
또, 직선 $y=2x-2$와 접하므로
이차방정식 $ax^2+(b-2)x+2=0$에서
$D=(b-2)^2-8a=0$
$\therefore\ b^2-4b+4-8a=0\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$\begin{cases} a=18 \\ b=14 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$
이때, $ab<0$을 만족시키는
a, b의 값은 $a=2,\ b=-2$
$\therefore\ a+b=0$

23. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지는 $2x+1$이고, $g(x)$를 x^2-5x+6으로 나눈 나머지는 $x-4$이다. 이 때, $(x+2)f(x)+3g(x+1)$을 $x-2$로 나눈 나머지를 구하면?

① 7　② 9　③ 13　④ 17　⑤ 23

해설

$f(x)=(x^2-4)p(x)+2x+1$에서 $f(2)=5$
$g(x)=(x^2-5x+6)q(x)+x-4$에서 $g(3)=-1$
$h(x)=(x+2)f(x)+3g(x+1)$이라 놓으면,
$h(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는
$h(2)=4f(2)+3g(3)=17$

24. 이차항의 계수가 1 인 이차방정식에서 상수항을 1 만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3 만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

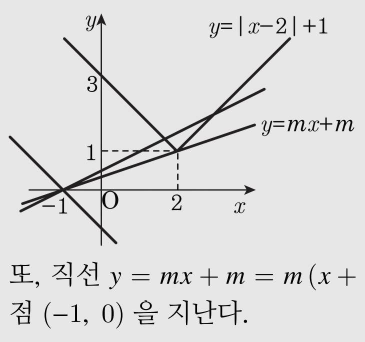
처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$이라 하면
$x^2 + bx + (c+1) = 0$의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D = b^2 - 4(c+1) = 0$
$\therefore\ b^2 = 4c + 4 \cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2 + bx + (c-3) = 0$의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$가 된다.
$\therefore\ \alpha + 2\alpha = -b \cdots\cdots$ ㉡
$\therefore\ \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b = \pm 12,\ c = 35$이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
$\therefore\ x = -5$ 또는 $-7,\quad x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

25. 함수 $y = |x-2|+1$ 의 그래프가 직선 $y = mx+m$ 과 만나기 위한 양수 m 의 최솟값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

$x \geq 2$ 일 때, $|x-2| = x-2$ 이므로
$y = x-2+1 = x-1$
$x < 2$ 일 때, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = -x+2+1 = -x+3$
따라서, $y = |x-2|+1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, 직선 $y = mx+m = m(x+1)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 0)$ 을 지난다.

직선 $y = mx+m$ 이 점 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, $1 = 2m+m \therefore m = \frac{1}{3}$

직선 $y = mx+m$ 이 직선 $y = -x+3$ 과 평행할 때, $m = -1$
따라서, 직선 $y = mx+m$ 이 $y = |x-2|+1$ 의 그래프와 만나려면 기울기 m 의 값의 범위가

$m \geq \frac{1}{3}$ 또는 $m < -1$ 이어야 한다.

그런데 양수 m이므로 $m \geq \frac{1}{3}$ 그러므로 구하는 m 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이다.