

1. 이차방정식 $x^2+ax+8=0$ 의 한 근이 2이고 다른 한 근이 이차방정식 $3x^2-10x+b=0$ 의 한 근일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^2+ax+8=0$ 에 $x=2$ 를 대입하면 $a=-6$ 이다.

$x^2-6x+8=0$, $(x-4)(x-2)=0$ 이므로

다른 한 근은 $x=4$ 이다.

$3x^2-10x+b=0$ 에 $x=4$ 를 대입하면 $b=-8$

$\therefore a-b=-6-(-8)=2$

2. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 8x + 2a + 6 = 0$ 이 중근을 가질 때, 다음 중 a 의 값과 근을 구하면?

① $a = -3, x = 3$

② $a = 4, x = 4$

③ $a = -4, x = -3$

④ $a = 5, x = 4$

⑤ $a = 5, x = -2$

해설

$$x^2 - 8x + 2a + 6 = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + 2a + 6 = 0$$

중근을 가지므로 $-10 + 2a = 0$ 이다.

$$\therefore a = 5$$

중근 $x = 4$ 이다.

3. 이차방정식 $(5x - 4)^2 = 9$ 를 풀어라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = \frac{1}{5}$ 또는 0.2

▷ 정답 : $x = \frac{7}{5}$ 또는 1.4

해설

$$(5x - 4)^2 = 9$$

$$5x - 4 = \pm 3$$

$$5x = 4 \pm 3, x = \frac{4 \pm 3}{5}$$

$$x = \frac{7}{5} \text{ 또는 } x = \frac{1}{5}$$

4. 다음 보기에서 해가 없는 이차방정식을 모두 골라라. (단, 완전제곱식을 이용하여라.)

보기

㉠ $x^2 - 3x + 5 = 0$

㉡ $x^2 + 4x + 2 = 0$

㉢ $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = 0$

㉣ $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{12} = 0$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

▶ 정답 : ㉢

해설

㉠ $x^2 - 3x = -5$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -5 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{11}{4}$$

따라서 제곱한 수는 음수가 될 수 없으므로 해가 없다.

㉡ $x^2 + 4x = -2$

$$x^2 + 4x + 4 = -2 + 4$$

$$(x + 2)^2 = 2$$

㉢ $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = 0$ 에서 양변에 2 를 곱하면 $x^2 + \frac{4}{3}x = \frac{3}{2}$

$$x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{3}{2} + \frac{4}{9}$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{35}{18}$$

㉣ $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{12} = 0$ 에서 양변에 3 을 곱하면 $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{3}{16}$$

따라서 제곱한 수는 음수가 될 수 없으므로 해가 없다.

5. $7x - 5 < 4(x + 1)$ 이고 x 는 자연수일 때, $x^2 - 5x + 6 = 0$ 를 풀면?

① $x = 0, x = 1$

② $x = 2$

③ $x = 2, x = 3$

④ $x = 3$

⑤ $x = -2, x = 3$

해설

$7x - 5 < 4(x + 1)$ 에서 $7x - 4x < 4 + 5, 3x < 9 \therefore x < 3$
따라서 x 의 값은 1, 2이다.
 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해는 $x = 2, x = 3$ 이므로 해는 $x = 2$ 가 된다.

6. 부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 만족시키는 두 자연수가 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근일 때, $a^2 - b^2$ 의 값은?

① 61 ② 51 ③ 11 ④ -11 ⑤ -61

해설

부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 풀면 다음과 같다.

$$4 \leq 2x < 7$$

$$2 \leq x < \frac{7}{2}$$

$$\therefore x = 2, 3$$

이 두 자연수를 근으로 가지므로 이를 이차방정식에 대입하여 풀면

$$a = -5, b = 6$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (-5)^2 - 6^2 = 25 - 36 = -11$$

7. 다음 중 $(a-2)(b+1)=0$ 을 만족하는 a, b 를 모두 고른 것은?

$\text{㉠ } a=2, b=1$	$\text{㉡ } a=3, b=1$
$\text{㉢ } a=1, b=-1$	$\text{㉣ } a=2, b=-1$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉣
- ④ ㉠, ㉣
- ⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

$a-2=0$ 또는 $b+1=0$
 $a=2$ 또는 $b=-1$
따라서 ㉠, ㉢, ㉣이다.

8. 이차방정식 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 의 두 근을 a, b 라고 할 때, 다음 중 $a+2, b+2$ 를 두 근으로 갖는 이차항의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2 - 2x - 35 = 0$

② $x^2 + 2x - 35 = 0$

③ $x^2 - 12x + 35 = 0$

④ $x^2 + 12x + 35 = 0$

⑤ $x^2 - 4x - 30 = 0$

해설

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 5)(x - 3) = 0$$

$$a = 5, b = 3$$

$$\therefore a + 2 = 7, b + 2 = 5$$

따라서 5, 7을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$(x - 7)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x^2 - 12x + 35 = 0$$

9. x 에 대한 이차방정식 $(m+1)x^2 + (m^2+3m-4)x - 8 = 0$ 의 한 근이 2일 때, 두 근을 모두 양수가 되게 하는 m 의 값과 나머지 한 근의 곱이 $-\frac{a}{b}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=29$

해설

한 근이 2이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$4(m+1) + 2(m^2+3m-4) - 8 = 0$$

$$2m^2 + 10m - 12 = 0$$

$$m^2 + 5m - 6 = 0$$

$$(m+6)(m-1) = 0$$

$$m = -6 \text{ 또는 } m = 1$$

i) $m=1$ 일 때,

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ 또는 } x = -2 \text{ } (-2 < 0 \text{ 이므로 부적합})$$

ii) $m=-6$ 일 때,

$$-5x^2 + 14x - 8 = 0$$

$$5x^2 - 14x + 8 = 0$$

$$(x-2)(5x-4) = 0$$

$$x = 2 \text{ 또는 } x = \frac{4}{5} \text{ (두 근이 모두 양수이므로 적합)}$$

따라서 $m=-6$ 이고, 다른 한 근은 $\frac{4}{5}$ 이므로 $-6 \times \frac{5}{4} = -\frac{24}{5}$

$$\therefore a=24, b=5$$

$$\therefore a+b=15+2=29$$

10. 이차방정식 $(x-11)^2 = \frac{a-7}{4}$ 이 근을 갖도록 하는 상수 a 의 값 중 가장 작은 자연수의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\frac{a-7}{4} \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$a-7 \geq 0$$

$$a \geq 7$$

$\therefore a$ 의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수는 7 이다.

11. 이차방정식 $x - \frac{3}{x} = 6$ 의 두 근을 p, q 라고 할 때 $(p^2 - 6p + 5)(q^2 - 6q + 3)$ 의 값을 구하면?

- ① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 50

해설

$$x - \frac{3}{x} = 6 \text{의 양변에 } x \text{를 곱하면 } x^2 - 6x - 3 = 0$$

$x = p, x = q$ 를 각각 대입하면

$$p^2 - 6p - 3 = 0 \text{에서 } p^2 - 6p = 3$$

$$q^2 - 6q - 3 = 0 \text{에서 } q^2 - 6q = 3$$

$$\therefore (p^2 - 6p + 5)(q^2 - 6q + 3) = (3 + 5)(3 + 3) = 48$$

12. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 한 근이 p 일 때, $\frac{2p^3}{3p^2 - p - 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ 의 한 근이 } p \text{ 이므로} \\p^2 - 2p - 1 = 0 \\ \therefore p^2 = 2p + 1 \\p^3 = 2p^2 + p = 2(2p + 1) + p = 5p + 2 \\ \therefore \frac{2p^3}{3p^2 - p - 1} &= \frac{2(5p + 2)}{3(2p + 1) - p - 1} \\ &= \frac{10p + 4}{5p + 2} \\ &= 2\end{aligned}$$

13. 두 개의 이차방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 과 $x^2 - 2x - a = 0$ 은 단 한 개의 공통 해를 갖는다고 한다. 이 때, 공통 해와 양의 실수 a 의 값을 구하면?

① $x = 2, a = -3$

② $x = 2, a = 3$

③ $x = 1, a = 3$

④ $x = -1, a = -3$

⑤ $x = -1, a = 3$

해설

두 방정식의 공통인 해를 α 라 하고 $x = \alpha$ 를 두 방정식에 각각 대입하면

$$\alpha^2 + a\alpha + 2 = 0 \cdots \textcircled{A}, \alpha^2 - 2\alpha - a = 0 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 하면

$$(a+2)\alpha + (a+2) = 0, (a+2)(\alpha+1) = 0$$

$$a = -2 \text{ 또는 } \alpha = -1 \text{ 에서 } a > 0 \text{ 이므로 } \alpha = -1$$

$\alpha = -1$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$1 - a + 2 = 0 \quad \therefore a = 3$$

14. 방정식 ㉠의 해가 ㉡의 해 사이에 있을 때, 정수 m 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

㉠ $4(x+1)=m+3$

㉡ $4x^2+4x-11=0$

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

㉡ $4x^2+4x-11=0$
 $x^2+x-\frac{11}{4}=0$
 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=3$
 $\therefore x=\frac{-1\pm2\sqrt{3}}{2}$

㉠ $4(x+1)=m+3 \quad \therefore x=\frac{m-1}{4}$
 $\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}<\frac{m-1}{4}<\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}$
 $-2-4\sqrt{3}<m-1<-2+4\sqrt{3}$
 $-1-4\sqrt{3}<m<-1+4\sqrt{3}$
정수 m 의 최솟값은 -7, 최댓값은 5 이다.
 $\therefore -7+5=-2$

15. 이차방정식 $\frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{2x}$ 의 양의 근을 α 라고 할 때, $\alpha^2 + 4\alpha$ 의 값은?

① $24 + 5\sqrt{21}$

② $26 + 6\sqrt{23}$

③ $28 + 7\sqrt{26}$

④ $32 + 8\sqrt{23}$

⑤ $34 + 8\sqrt{22}$

해설

$\frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{2x}$ 의 양변에 $12x$ 를 곱하면

$$x^2 - 4x - 18 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 18 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 22$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{22}$$

α 는 양의 근이므로 $\alpha = 2 + \sqrt{22}$

$$\therefore \alpha^2 + 4\alpha = 34 + 8\sqrt{22}$$