1. 세 다항식 $A = 2x^2y - xy^2 + y^3$, $B = -2xy^2 + 2y^3$,$C = x^3 + y^3$ 에 대하여 $(2A - B) + C$ 를 계산하면?

① $2x^3 - 4x^2y + 3y^3$
② $-x^3 + 2x^2y - y^3$
③ $2x^3 + 4x^2y - y^2$
④ $x^3 + 4x^2y + y^3$
⑤ $x^3 + 4y^3$

해설

$(2A - B) + C$
$= 4x^2y - 2xy^2 + 2y^3 - (-2xy^2 + 2y^3) + x^3 + y^3$
$= x^3 + 4x^2y + y^3$

해설

$(2A - B) + C$
$= x^3 + 4x^2y + y^3$

2. x에 대한 항등식 $ax^2 - 5x + c = 2x^2 + bx - 1$에서 a, b, c의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = -5$

▷ 정답: $c = -1$

해설

계수비교법에 의하여 동차의 계수가 같아야 한다.

$\therefore\ a = 2,\ b = -5,\ c = -1$

3. 다항식 $f(x) = -4x^3 + kx + 1$가 일차식 $x - 1$로 나누어 떨어 지도록 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = -4x^3 + kx + 1 = (x-1)Q(x)$

$f(1) = -4 + k + 1 = 0$

$\therefore\ k = 3$

4. 다음 보기에 주어진 수를 x라 할 때, $\sqrt{x}$가 허수가 되는 x의 개수는?

$$-2,\ \frac{1}{3},\ 0,\ -3.5,\ 4,\ -\frac{2}{5}$$

① 1 개 ② 3 개 ③ 5 개 ④ 7 개 ⑤ 9 개

해설

$\sqrt{x}$가 허수가 되는 $x = -2,\ -3.5,\ -\frac{2}{5}$ 의 3개이다.

5. $\sqrt{-3}\times\sqrt{-6}-\sqrt{8}\div\sqrt{-4}$ 을 $a+bi$ (a, b 는 실수) 형태로 나타내면?

① $2\sqrt{2}+3i$ ② $-3\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ ③ $-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}i$
④ $2\sqrt{3}i$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{-3}\times\sqrt{-6}-\sqrt{8}\div\sqrt{-4}$

$=\sqrt{3}i\times\sqrt{6}i-\dfrac{2\sqrt{2}}{2i}$

$=-3\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

6. 등식 $x^2-2x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2$ 이 x에 관한 항등식일 때, $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2-2x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2$

$x=1$을 대입하면 $2=a$ ······①

$x=0$을 대입하면 $3=a-b+c$ ······②

$x=2$를 대입하면 $3=a+b+c$ ······③

①을 ②, ③에 대입하여 정리하면

$b-c=-1,\ b+c=1$

두 식을 연립하면 $b=0,\ c=1$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=4+0+1=5$

7. 두 다항식 x^3+1, x^3+2x^2-5x-6의 최대공약수를 구하면?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x-1$ ⑤ $x-2$

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$
$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)$
따라서 최대공약수는 $x+1$

8. 세 개의 다항식 $x^3+ax+b,\ x^3+cx^2+a,\ cx^2+bx+4$, 의 공약수 중 하나가 $x-1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2　② -2　③ 3　④ -3　⑤ 4

해설

$f(x)=x^3+ax+b \to\ f(1)=1+a+b=0\cdots$㉠
$g(x)=x^3+cx^2+a \to\ g(1)=1+c+a=0\cdots$㉡
$h(x)=cx^2+bx+4 \to\ h(1)=c+b+4=0\cdots$㉢
㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(a+b+c)+6=0$
$\therefore\ a+b+c=-3$

9. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1　　② -1

③ $\sqrt{-1}$　　④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$

10. $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^2 - 2z + 3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ -1

해설

$z = \dfrac{2}{1+i} = 1 - i$

$z^2 - 2z + 3 = (1-i)^2 - 2(1-i) + 3 = 1$

11. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$ 의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

12. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계를 이용하면,

$\alpha+\beta=-3 \quad \alpha\beta=1$

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$=-3+2=-1$

13. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $1+2i$ 일 때 실수 a,b 를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a=-2$

▷ 정답: $b=5$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 $1+2i$ 이면 다른 한 근은 $1-2i$ 이다.
(두 근의 합) $=(1+2i)+(1-2i)=-a$ ⋯⋯㉠
(두 근의 곱) $=(1+2i)(1-2i)=b$ ⋯⋯㉡
∴ ㉠, ㉡에서
$a=-2,\ b=5$ 이다.

14. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2)\div(\square x^2+\square x+\square)=x+2$$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: 2

▷ 정답: −1

해설

$\square x^2+\square x+\square=A$라 하면

$(x^3+4x^2+3x-2)\div A=x+2$

$\therefore\ A=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)$

$\therefore\ A=x^2+2x-1$이므로

$\square$안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, −1이다.

15. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$
$=xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$
$=7$

16. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -21 ② -15 ③ -5 ④ -1 ⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서
x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.
$\therefore\ a=b \quad \therefore\ a-b=0$

17. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$

$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$= 4\{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)\}$

$= 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

18. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면
$2x+ay-b=k(x-y-1)$
x, y에 대하여 정리하면,
$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$
위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로
$2-k=0$, $a+k=0$, $-b+k=0$
$\therefore$ $k=2$, $a=-2$, $b=2$
$\therefore$ $a-b=-4$

19. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

20. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$ 일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots$ ㉠

양변에 $x = 2$를 대입하면

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \quad \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14})$ 이다.

$\therefore\ a_0 + a_2 + \cdots a_{14} = 1$

21. 두 다항식 $f(x) = x^2+3x+a$, $g(x) = x^3+ax$를 $x+2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

해설

$f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$에서

$f(-2) = g(-2)$이므로

$4 - 6 + a = -8 - 2a$

$\therefore\ a = -2$

22. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지가 $4x+3$일 때 $f(2x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① -1 ② 0 ③ 3 ④ 7 ⑤ 11

해설

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+4x+3$
$x=2$를 대입하면 $f(2)=11$
$f(2x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 R이라 하면
$f(2x)=(x-1)Q'(x)+R$
$x=1$을 대입하면 $f(2)=R$
$\therefore\ R=11$

23. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & b & 1 \\ & & c & d & 1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & \boxed{2} \end{array}$$

① $a=3$　② $b=2$　③ $c=-1$

④ $d=-3$　⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a & b & 1 \\ & & -1 & -a+1 & -b+a-1 \\ \hline & 1 & a-1 & b-a+1 & \boxed{-b+a} \end{array}$$

이때 $k=-1,\ c=-1,\ d=-a+1,\ b-a+1=-1,\ -b+a=2$ 이므로

$k=-1,\ c=-1,\ a=4,\ b=2,\ d=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

24. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(2x+3y+1)$
$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$

25. 이차항의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C가 다음 세 조건을 만족할 때, A를 구하면?

㉠ A, B의 최대공약수는 $x-2$이다.
㉡ B, C의 최대공약수는 $x+1$이다.
㉢ A, C의 최소공배수는 x^3-2x^2-x+2이다.

① x^2-4x+3 ② x^2-3x+2 ③ x^2-2x+1
④ x^2-2x-3 ⑤ x^2-x+2

해설

이차항의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C에 대하여
A, B의 최대공약수가 $x-2$이므로
$A=(x-2)(x-\alpha)$, $B=(x-2)(x-\beta)$
B, C의 최대공약수가 $x+1$이므로
$B=(x+1)(x-2)$, $C=(x+1)(x-\gamma)$
A, C의 최소공배수는
$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-2)(x-1)$
$\therefore\ x-\alpha=x-\gamma=x-1$
$\therefore\ A=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$

26. 복소수 $(1+i)x^2-(1-4i)x-(2-3i)$가 실수일 때의 x값과 순허수일 때의 x값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$(x^2-x-2)+(x^2+4x+3)i$

실수가 되기위해서는 $x^2+4x+3=0$

$(x+1)(x+3)=0 \therefore\ x=-3,\ -1$

순허수가 되기 위해서는

$x^2-x-2=0$이고 $x^2+4x+3\neq 0$

$x=-1,\ 2$이고 $x\neq -3,\ -1 \therefore\ x=2$

$(-3)\times(-1)\times 2=6$

27. $|x-1| = 3 - \sqrt{x^2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$|x-1| = 3 - |x|$ 에서,
$|x| + |x-1| = 3$ 이다.
ⅰ) $x < 0$ 일 때,
$-x-(x-1) = 3$
$\therefore x = -1$
ⅱ) $0 \le x < 1$ 일 때,
$x-(x-1) = 3$
$0 \cdot x + 1 = 3$ 이므로 불능
ⅲ) $x \ge 1$ 일 때,
$x+(x-1) = 3$
$\therefore x = 2$
따라서 구하는 해는
$x = -1$ 또는 $x = 2$ 이다.

28. x의 이차식 $x^2+(3a+1)x+2a^2-b^2$이 완전제곱식이고, a, b가 정수일 때, 순서쌍 (a, b)의 갯수는?

① 1개　　② 2개　　③ 3개　　④ 4개　　⑤ 5개

해설

완전제곱식이 되려면 판별식이 0이다.

$D=(3a+1)^2-4(2a^2-b^2)=0$

$a^2+6a+1+4b^2=0$

$\Rightarrow \quad (a+3)^2+(2b)^2=8$

a, b가 정수이므로

$a+3=\pm 2, \quad 2b=\pm 2$

$\therefore \quad a=-1, \ -5, \quad b=1, -1$

가능한 순서쌍 (a, b)의 갯수 : 4개

29. x 에 대한 다항식 $(x^2+2x)^2+3(x^2+2x)-4$ 를 계수가 복소수인 범위에서 인수분해 한 것은?

① $(x^2+2x+4)(x^2+2x-1)$
② $(x^2+2x+4)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$
③ $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$
④ $(x^2-2x+4)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$
⑤ $(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

해설

$x^2+2x=Y$ 라 하면,
(준식)
$=Y^2+3Y-4=(Y-1)(Y+4)$
$=(x^2+2x-1)(x^2+2x+4)$
$=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

30. 이차방정식 $x^2 + 2(k-11)x - k + 3 = 0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절댓값보다 크기 위한 정수 k의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

두 근을 α, β라 할 때,

$\alpha\beta = -k + 3 < 0$, $\alpha + \beta = -2(k-11) > 0$

$\therefore \quad 3 < k < 11$

31. 두 다항식 $Q(x)$ 와 $R(x)$ 에 대하여 $x^7 - 2 = (x^3 + x)Q(x) + R(x)$ 가 성립할 때, $Q(1)$ 의 값은? (단 $R(x)$ 의 차수는 이차 이하이다.)

① 1　② 2　③ 4　④ 8　⑤ 16

해설

$R(x) = ax^2 + bx + c$($a,\ b,\ c$는 실수)라 하면
$x^7 - 2 = x(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$
양변에 $x = 0$을 대입하면 $-2 = c$
$x^7 - 2 = x(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx - 2 \cdots$ ①
①의 양변에 $x = i$을 대입하면
$-i - 2 = -a + bi - 2$
$a = 0,\ b = -1$ 이므로 $R(x) = -x - 2$
$\therefore\ x^7 - 2 = (x^3 + x)Q(x) - x - 2$
양변에 $x = 1$을 대입하면
$-1 = 2Q(1) - 3$ 이므로
$\therefore\ Q(1) = 1$

32. 다항식 $f(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x),\ R$　　② $3Q(x),\ R$　　③ $Q(x),\ 3R$
④ $\frac{1}{3}Q(x),\ R$　　⑤ $Q(x),\ \frac{1}{3}R$

해설

$$f(x) = \left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$
$$= 3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$$
$$= (3x-2)\frac{1}{3}Q(x)+R$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫 : $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지 : R

33. 다음 보기 중 $ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)$ 의 인수인 것을 모두 고르면?

㉠ $a-b$	㉡ $b+c$	㉢ $a-c$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$
\begin{aligned}
&ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)\\
&=ab^2-a^2b+ac^2-a^2c+2abc-b^2c-bc^2\\
&=-(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a-bc(b+c)\\
&=-(b+c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\
&=-(b+c)(a-b)(a-c)\\
&=(a-b)(b+c)(c-a)
\end{aligned}
$$

34. 세 양수 $a,\ b,\ c$가 $a^3+b^3+c^3=3abc$를 만족시킬 때 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이라고 한다. 이 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$에서

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $a+b+c\neq 0$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\therefore\ \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore\ a=b=c$ ($\because a,\ b,\ c$는 실수)

따라서 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$a^2=1$

$\therefore\ a=b=c=1$

$\therefore\ a+b+c=3$

35. $x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$을 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\frac{(11^4+324)(23^4+324)(35^4+324)(47^4+324)}{(5^4+324)(17^4+324)(29^4+324)(41^4+324)}$$

① 192　② 193　③ 194　④ 195　⑤ 196

해설

$x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$

$=\{(x-y)^2+y^2\}\{(x+y)^2+y^2\}$ 이고,

$324=4\times 3^4$ 이므로

$11^4+324=(11^2-2\times 11\times 3+2\times 3^2)(11^2+2\times 11\times 3+2\times 3^2)$

$=\{(11-3)^2+3^2\}\{(11+3)^2+3^2\}$

$=(8^2+3^2)(14^2+3^2)$

따라서 차례대로 모두 정리해 보면 주어진 식은

$$\frac{\{(8^2+3^2)(14^2+3^2)\}\{(20^2+3^2)(26^2+3^2)\}}{\{(2^2+3^2)(8^2+3^2)\}\{(14^2+3^2)(20^2+3^2)\}}$$

$$\frac{\{(32^2+3^2)(38^2+3^2)\}\{(44^2+3^2)(50^2+3^2)\}}{\{(26^2+3^2)(32^2+3^2)\}\{(38^2+3^2)(44^2+3^2)\}}$$

$$=\frac{50^2+3^2}{2^2+3^2}=\frac{2509}{13}=193$$

36. 두 다항식 $f(x) = x^3+x^2+ax-3$,$g(x) = x^3-x^2+bx+3$ 의 최대공약수 $G(x)$ 가 x 의 이차식일 때, ab를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x) = x^3 + x^2 + ax - 3$

$g(x) = x^3 - x^2 + bx + 3$

$f(x) - g(x) = 2x^2 + (a-b)x - 6$

$f(x) + g(x) = 2x^3 + (a+b)x$

$= x\{2x^2 + (a+b)\}$

$G(x)$ 는 $f(x) - g(x), f(x) + g(x)$ 의 공약수이다.

$\therefore\ 2x^2 + (a-b)x - 6 = 2x^2 + (a+b)$

$a - b = 0,\ a + b = -6$

$\therefore\ a = -3, b = -3$, $ab = 9$

37. $\dfrac{\overline{z}+1}{z}+\dfrac{z-1}{\overline{z}}=i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 z^2 의 값을 구하면?

① ±1　② $\pm2i$　③ ±2　④ $\pm i$　⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z=a+bi \\ z=a-bi \end{cases}$$

$$\frac{\overline{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\overline{z}}=i$$

$$\frac{\overline{z}^2+\overline{z}+z^2-z}{z\overline{z}}=i$$

$$\frac{a^2-2abi-b^2+a-bi+a^2+2abi-b^2-a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=i$$

$$\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{-2b}{a^2+b^2}i=i$$

$$a^2=b^2,\ \frac{-2b}{a^2+b^2}=+1$$

$$\therefore\ a=\pm1, b=-1$$

$$z=\pm1-i\ ,\ z^2=\pm2i$$

38. $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1

④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$

$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

39. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

$a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}=a-1+\dfrac{3}{3a}=a+\dfrac{1}{a}-1$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$a-3+\dfrac{1}{a}=0\quad\therefore\ a+\dfrac{1}{a}=3$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

40. a, b, c는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2-bx+c=0$의 해가 α, β일 때, 방정식 $cx^2-bx+a=0$의 해를 구하면?

① $\alpha,\ \beta$　　② $-\alpha,\ -\beta$　　③ $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$

④ $-\frac{1}{\alpha},\ -\frac{1}{\beta}$　　⑤ $\alpha,\ -\beta$

해설

$\alpha+\beta=\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$cx^2-bx+a=0$에서

(두 근의 합) $=\frac{b}{c}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\left(\therefore \frac{b}{c}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}\right)$

(두 근의 곱) $=\frac{a}{c}=\frac{1}{\alpha\beta}$

따라서 구하는 두 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$이다.

해설

$ax^2-bx+c=0$의 양변을 $x^2(\neq 0)$으로 나누면

$a-\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=0$

이 때, $\frac{1}{x}=t$라 놓으면, $ct^2-bt+a=0$

$t=\frac{1}{x}=\frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$

$\therefore\ cx^2-bx+a=0$의 해는 $\frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$이다.

41. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$이라 하면
$x^2 + bx + (c+1) = 0$의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D = b^2 - 4(c+1) = 0$
$\therefore\ b^2 = 4c + 4 \cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2 + bx + (c-3) = 0$의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$가 된다.
$\therefore\ \alpha + 2\alpha = -b \cdots\cdots$ ㉡
$\therefore\ \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b = \pm 12,\ c = 35$이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
$\therefore\ x = -5$ 또는 $-7,\quad x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

42. $x=2$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y=a(x-2)^2-1$
$\quad=a(x^2-4x+4)-1$
$\quad=ax^2+4ax+4a-1$

$4a-1=3$
$a=1$

$y=(x-2)^2-1$
$apq=1\times2\times(-1)=-2$

43. $1 \le x \le a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$y = x^2 - 2x - 3a = (x-1)^2 - 3a - 1$
최솟값 : $x = 1$ 일 때 $\Rightarrow -3a - 1$
최댓값 : $x = a$ 일 때 $\Rightarrow a^2 - 5a$
$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$
$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$
$a = 3 \ (\because a > 1)$

44. 이차함수 $y=x^2+mx+m$ 의 최솟값을 M 이라 할 때, M 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$y=x^2+mx+m=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+m$

최솟값 $M=-\frac{m^2}{4}+m$

$M=-\frac{m^2}{4}+m=-\frac{1}{4}(m-2)^2+1$

$m=2$ 일 때, M 은 최댓값 1 을 갖는다.

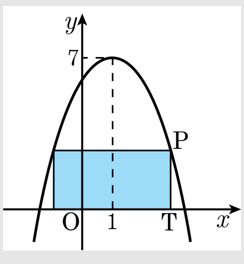
45. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는
$(t,\ -t^2 + 2t + 5)$ 이다.
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,
직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$
\begin{aligned}
(\text{둘레의 길이}) &= 2\{2(t-1) - t^2 + 2t + 5\} \\
&= 2(-t^2 + 4t + 3) \\
&= -2t^2 + 8t + 6 \\
&= -2(t-2)^2 + 14
\end{aligned}
$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

46. $a+b=1$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2005}+b^{2005}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b=1-a$ 를 a^2+b^2 에 대입하여 정리하면

$a^2-a+1=0$ $(a+1)(a^2-a+1)=0$

$a^3+1=0$ $\therefore$ $a^3=-1$

마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

$a^{2005}+b^{2005}=(a^3)^{668}\cdot a+(b^3)^{668}\cdot b=a+b=1$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.

$a^2-a+1=0$ 에서 $a^2=a-1$

$a^3=a^2\cdot a=(a-1)\cdot a=a^2-a=-1$

마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

47. 다항식 x^3-2x^2+mx-4를 $x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$이고 몫 $Q(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -5이다. 이때, m의 값을 구하면?

① 6　　② 4　　③ 0　　④ -1　　⑤ -6

해설

$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+R$이라 하자.
$x=1$을 대입하면 $R=m-5$
$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+m-5\cdots$①
$Q(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -5이므로
$Q(-1)=-5$
①식에 $x=-1$을 대입하면
$-1-2-m-4=-2Q(-1)+m-5$
$-2m=12$
$\therefore\ m=-6$

해설

조립제법을 사용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & m & -4 \\ & & 1 & -1 & m-1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & m-1 & \boxed{m-5} \\ & & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{m+1} & \end{array}$$

$m+1=-5\ \therefore\ m=-6$

48. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$\frac{D_1}{4}=a^2-bc$,

$\frac{D_2}{4}=b^2-ca$,

$\frac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$

따라서, $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

49. n 이 자연수일 때, 이차함수 $y = 2n^2 - 11n + 20$ 의 최솟값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$$y = 2n^2 - 11n + 20$$
$$= 2\left(n^2 - \frac{11}{2}n + \frac{121}{16}\right) - \frac{121}{8} + 20$$
$$= 2\left(n - \frac{11}{4}\right)^2 + \frac{39}{8}$$

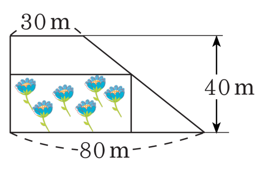
n 이 자연수이므로

$\frac{11}{4}$ 에 가장 가까운 자연수는 3 이다.

따라서 $n = 3$ 일 때,

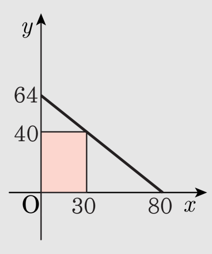
최솟값 $2 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 + 20 = 5$ 를 갖는다.

50. 아래 그림과 같은 사다리꼴 모양의 토지 안에 직사각형 모양의 꽃밭을 가능한 한 넓게 만들려고 한다. 이 꽃밭의 넓이의 최댓값은? (단, 넓이의 단위는 m^2)



① $1240\,m^2$ ② $1260\,m^2$ ③ $1280\,m^2$ ④ $1300\,m^2$ ⑤ $1320\,m^2$

해설



$80 : 30 = 40 + k : k$ 이므로 $k = 24$
따라서 y 절편은 64 가 된다.

빗변의 그래프는 $y = -\frac{4}{5}x + 64$ 이므로

사각형의 넓이는

$$x\left(-\frac{4}{5}x + 64\right) = -\frac{4}{5}x^2 + 64x$$
$$= -\frac{4}{5}(x - 40)^2 + 1280$$

즉, 밑변의 길이가 40 m 일때 직사각형 넓이의 최댓값 $1280\,m^2$ 이 된다.