1. 다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 $Q(x)$, R 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $3x+1$ 으로 나눈 몫과 나머지를 구하면?

① $Q(x)$, R　② $3Q(x)$, $3R$　③ $3Q(x)$, R
④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R　⑤ $\frac{1}{3}Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$$f(x) = Q(x)\left(x+\frac{1}{3}\right)+R = \frac{1}{3}Q(x)(3x+1)+R$$

2. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에 대하여 $f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어떨어지고, $f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어진다. 이 때, $a - 2b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x) - 2$는 $x - 1$로 나누어떨어지므로

$f(1) - 2 = 0 \therefore\ 1 + a + b - 2 = 0$

$\therefore\ a + b = 1 \cdots$ ①

$f(x) + 2$는 $x + 1$로 나누어떨어지므로

$f(-1) + 2 = 0 \therefore\ 1 - a + b + 2 = 0$

$\therefore\ -a + b = -3 \cdots$ ②

①, ② 에서 $a = 2,\ b = -1$

$\therefore\ a - 2b = 4$

3. $x^4 - 3x^2 + 1$을 인수분해 하면?

① $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$　② $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

③ $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - x - 1)$　④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

⑤ $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 1 &= x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2 - 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1) \end{aligned}$$

4. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2010}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① -2 ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ $2i$

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$ 이므로

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

$$=f(-i)+f(i)$$

$$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2010}$$

$$=i^{2010}+(-i)^{2010}$$

$$=(i^4)^{502}\cdot i^2+\left\{(-i)^4\right\}^{502}\cdot(-i)^2$$

$$=-1+(-1)=-2$$

5. $\alpha = 1+i$ 일 때, $\overline{\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha\overline{\alpha}+1}\right)}$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

① $\dfrac{i}{3}$ ② i ③ $-i$ ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$\alpha = 1+i$, $\overline{\alpha} = 1-i$ 를 대입하면

$$\overline{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha\overline{\alpha}+1}\right)} = \overline{\left\{\frac{1-(1+i)}{(1+i)(1-i)+1}\right\}} = \overline{\left(\frac{-i}{3}\right)} = \frac{i}{3}$$

6. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot 2+12=9$

7. x에 대한 이차방정식 $2x^2+4x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$, $2\alpha\beta$를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2-3x+3=0$ ② $x^2-3x+1=0$

③ $x^2+2x+\frac{1}{2}=0$ ④ $x^2-4x+3=0$

⑤ $x^2+4x-3=0$

해설

$2x^2+4x+1=0$의 해가 α, β이므로

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4-1=3\\ 2\alpha\beta=1\end{cases}$$

3과 1을 두 근으로 하고

이차항의 계수가 1인이차방정식은

$x^2-4x+3=0$

8. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times 2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005 = x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식}) = \frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$= x+1$$
$$= 2006$$

9. $a+b=4$, $a^2+b^2=10$일 때, a^5+b^5의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$a+b=4$, $a^2+b^2=10$

$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}=3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=28$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^5+b^5 &= (a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)\\ &= 28\times 10-9\times 4\\ &= 244\end{aligned}$$

10. x에 대한 항등식 $(1+2x-x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$에서 $3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

i) 항등식의 상수항 : $a_0 = 1$

ii) 항등식에 $x=1, x=-1$을 대입하여 식을 만든다.

$x=1$을 대입하면 $2^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{10} \cdots$ ①

$x=-1$을 대입하면 $(-2)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots + a_{10} \cdots$ ②

① + ②: $0 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$

$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = 0$

$3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots a_{10} = 2 (\because a_0 = 1)$

11. $x^{113}+1$을 x^3+x로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 하자. 이때, $R(2006)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2007

해설

$$\begin{aligned} x^{113}+1 &= (x^3+x)Q(x)+R(x) \\ &= x(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c \end{aligned}$$

항등식이므로 $x=0, x^2=-1$을 각각 대입하면,

$1=c,\ x+1=-a+bx+c$

$\therefore a=0,\ b=1$

$\therefore R(x)=x+1$

따라서 $R(2006)=2007$

12. x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$,
$Q(x)$를 $x+3$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x)=(x-2)Q(x)+5, Q(x)=(x+3)Q_1(x)+3$이므로
$P(x)=(x-2)\{(x+3)Q_1(x)+3\}+5$
$\quad\quad=(x-2)(x+3)Q_1(x)+3x-1$
$\therefore\ P(-3)=-9-1=-10$
따라서 $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는
$-3P(-3)=-3\times(-10)=30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3)=3$
$P(x)=(x-2)Q(x)+5$에서 양변에 x를 곱하면
$xP(x)=x(x-2)Q(x)+5x\cdots$ ①
나머지정리에 의해 $xP(x)$를 $x+3$로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$이다.
①의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$-3P(-3)=-3\cdot(-5)Q(-3)-15$
$Q(-3)=3$을 대입하면 $-3P(-3)=30$

13. $f(x) = x^2 + ax + b,\ g(x) = x^2 + cx + d$가 다음 조건을 만족할 때, $ab - c + d$의 값은?

㉠ $f(x),\ g(x)$의 최소공배수는 $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$이다. ㉡ $f(1) = -4,\ g(0) = 5$

① -31 ② -11 ③ 5 ④ 13 ⑤ 29

해설

두 다항식의 최소공배수

$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x+1)(x+5)(x-3)$에서

인수들 중 적당한 두 인수들로 $f(1) = -4$,

$g(0) = 5$이 되도록 $f(x), g(x)$를 만들면

$f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$

$g(x) = (x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$

$a = -2, b = -3, c = 6, d = 5$

$\therefore\ ab - c + d = 5$

14. $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1

④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$

$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

15. 이차방정식 $x^2+kx+3k-11=0$의 두 근의 차가 최소가 되도록 실수 k의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+kx+3k-11=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 하면

$\alpha+\beta=-k,\ \ \alpha\beta=3k-11$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=k^2-12k+44=(k-6)^2+8$

따라서 $k=6$일 때 $(\alpha-\beta)^2$는 최소

해설

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$ 이므로

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{k^2-12k+44}}{1}$

$\therefore\ \ k^2-12k+44$가 최소이려면 $k=6$

16. 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$에서 한 근만이 양이기 위한 a의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a \leq 0$　② $0 < a \leq 1$　③ $1 < a \leq 2$

④ $-2 < a \leq 2$　⑤ $-1 < a \leq 2$

해설

(i) $\alpha > 0,\ \beta < 0$일 때, $\alpha\beta = a^2 - 4 < 0$

$\therefore\ -2 < a < 2$

(ii) $\alpha > 0,\ \beta = 0$일 때,

$\alpha + \beta = a > 0,\ \alpha\beta = a^2 - 4 = 0$

$\therefore\ a = 2$

(i), (ii)에서 $-2 < a \leq 2$

17. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $x+1$이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 8이다. $f(x)$를 $(x-1)^2(x+2)$로 나누었을 때의 나머지는?

① x^2-x-2 ② x^2-x+2 ③ x^2+x-2

④ $-x^2+3x$ ⑤ $-x^2+3x+2$

해설

$f(x)$를 $(x-1)^2(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지는 ax^2+bx+c라 하면

$f(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$

$f(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+a(x-1)^2+(x+1)$

($\because$ $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $x+1$)

양변에 $x=-2$를 대입하면 $f(-2)=9a+(-2)+1=8$

$\therefore\ a=1$

$ax^2+bx+c=a(x-1)^2+x+1=x^2-x+2$

$\therefore$구하는 나머지는 x^2-x+2

18. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

㉠ 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형 ㉡ 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형 ㉢ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형 ㉣ $a=b$ 인 이등변삼각형 ㉤ $b=c$ 인 이등변삼각형

① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

④ $a=b$ 인 이등변삼각형

⑤ $b=c$ 인 이등변삼각형

해설

$\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}=0$

$(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2=0$

$a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

$=2(a^2+b^2-c^2)=0$

$\therefore a^2+b^2-c^2=0$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

19. x에 관한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여, $(x+1)f(x)=(x-1)g(x)$일 때, 다음 중 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는?

① $(x-1)g(x)$ ② $(x+1)g(x)$ ③ $(x-1)^2g(x)$

④ $(x+1)^2g(x)$ ⑤ $(x-1)^3g(x)$

해설

$(x+1)f(x)=(x-1)g(x)\cdots$①

$x+1$과 $x-1$이 서로 소이므로

$x+1$은 $g(x)$의 인수이다.

따라서 $g(x)=(x+1)h(x)\cdots$② 로 놓으면

①에서 $f(x)=(x-1)h(x)\cdots$③

②와 ③에서 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는

$(x-1)(x+1)h(x)$ 즉, $(x-1)g(x)$

20. 두 다항식 x^3-ax^2-bx+1, x^3+bx^2+ax+1의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

최대공약수를 $(x-\alpha)$라 하자. 인수정리에 의해

$\alpha^3-a\alpha^2-b\alpha+1=0 \quad \cdots$ ①

$\alpha^3+b\alpha^2+a\alpha+1=0 \quad \cdots$ ②

②−① $=(b+a)\alpha^2+(a+b)\alpha$

$\quad\quad =(a+b)\alpha(\alpha+1)\cdots\cdots$③

$a+b=0$이면 두 다항식이 같아지므로 조건에 맞지 않는다

③에서 $\alpha(\alpha+1)=0 \quad \therefore \quad \alpha=0$ 또는 -1

i) $\alpha=0$ 을 ①에 대입 : $1=0 \Rightarrow$ 성립하지 않는다.

ii) $\alpha=-1$ 을 ①에 대입 : $-1-a+b+1=0$

$\therefore \quad a-b=0$

21. 방정식 $ax^2+ibx+c=0$에 대하여 다음 설명 중 타당한 것은?

① z가 주어진 방정식의 근이면 $\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

② z가 주어진 방정식의 근이면 $i\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

③ z가 주어진 방정식의 근이면 iz는 $ax^2+bx+c=0$의 근이다.

④ z가 주어진 방정식의 근이면 $-\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

⑤ z가 주어진 방정식의 근이면 $-i\bar{z}$는 $ax^2+bx+c=0$의 근이다.

해설

z가 주어진 방정식의 근이라면
$a,\ b,\ c$는 실수이므로 켤레복소수의 성질을 적용하면
$az^2+ibz+c=0,\ \overline{az^2+ibz+c}=0$
$a\overline{(z^2)}-ib\bar{z}+c=0,$
$a(-\bar{z})^2+ib(-\bar{z})+c=0$이므로
$-\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

22. 실수 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$가 $16 + x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_9 = 0$을 만족할 때, $\sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2} \times \cdots \times \sqrt{x_9}$의 값들의 곱을 구하면?

① 8　　② 16　　③ 24　　④ 36　　⑤ 14

해설

$x_1 \times x_2 \times\ \cdots\ x_9 = -16$ 이므로

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.

이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여

$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_m\ \ (y_i > 0)$ 이라 하고 양수인 것들은

$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdots,\ z_n\ (z_i > 0)$ 이라 하자.

그러면 $y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n = 16$ ($m + n = 9$, m :홀수)

i) $m = 4k + 1\ (k = 0,\ 1,\ 2)$ 일 때,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+1} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i \\ &= 4i\end{aligned}$$

ii) $m = 4k + 3\ (k = 0,\ 1)$ 일 때,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+3} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i^3 \\ &= -4i\end{aligned}$$

$\therefore$ i), ii)에서 $4i \times (-4i) = 16$

23. 두 함수 $f(x)=|x^2-2x-3|-1$과 $g(x)=2x-1$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

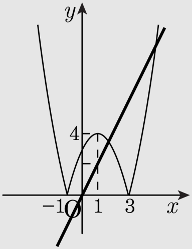
$f(x)=g(x)$에서 $|x^2-2x-3|-1=2x-1$

$|x^2-2x-3|=2x$

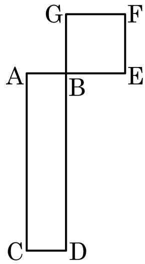
방정식 $|x^2-2x-3|=2x$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-2x-3|$의 그래프와 직선 $y=2x$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-2x-3|=|(x+1)(x-3)|=|(x-1)^2-4|$

따라서 다음 그림에서 교점이 2개이므로 구하는 실근의 개수는 2개이다.



24. 다음 그림과 같이 선분 AB 의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BE}} = 2 : 3$ 이 되도록 점 E 를 잡고 선분 BE 를 한 변으로 하는 정사각형 BEFG 를 그릴 때, 선분 GD 의 길이는 12 이다. 이때 $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{576}{13}$

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = x$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BE}} = 2 : 3$ 이므로

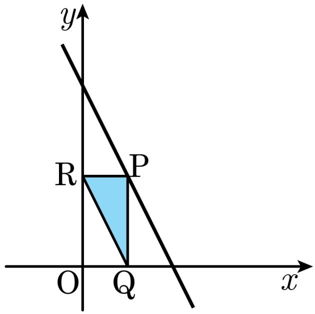
$$\overline{\mathrm{BE}} = \frac{3}{2}x = \overline{\mathrm{BG}}$$

$$\overline{\mathrm{BD}} = 12 - \overline{\mathrm{BG}} = 12 - \frac{3}{2}x = \overline{\mathrm{AC}}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 &= x^2 + \left(12 - \frac{3}{2}x\right)^2 \\ &= \frac{13}{4}\left(x - \frac{72}{13}\right)^2 + \frac{576}{13}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2$ 의 최솟값은 $\dfrac{576}{13}$ 이다.

25. 다음 그림과 같이 직선 $y=-2x+6$ 위의 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, △PRQ 의 넓이의 최댓값을 구하면? (단, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이다.)



① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

점 P 의 x 좌표를 a 라 하면

$\mathrm{P}(a,\ -2a+6),\ \mathrm{Q}(a,\ 0),\ \mathrm{R}(0, -2a+6)$

△PRQ 의 넓이를 y 라 하면

$$y=\frac{1}{2}a(-2a+6)$$
$$=-a^2+3a$$
$$=-\left(a^2-3a+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)$$
$$=-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

$a=\frac{3}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$