

1. 다음 연립부등식의 해를 $a < x < b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 5x + 2 > 3x - 4 \\ 2x - 1 < -7x + 26 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$5x + 2 > 3x - 4$$

$$2x > -6$$

$$\therefore x > -3$$

$$2x - 1 < -7x + 26$$

$$9x < 27$$

$$\therefore x < 3$$

$$-3 < x < 3 \text{ 이므로 } a = -3, b = 3$$

$$\therefore a + b = 0$$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+7 \geq 3x \\ x \geq a \end{cases}$ 을 만족하는 정수가 3개일 때, a 의 값의 범위는?

▶ 답:

▷ 정답: $4 < a \leq 5$

해설

$2x+7 \geq 3x$ 를 풀면 $x \leq 7$ 이다.

$a \leq x \leq 7$ 을 만족하는 정수 3 개가 존재하려면 $4 < a \leq 5$ 이다.

3. 원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + (2-b)x + (2a-4)y = 0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을
 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(-x)^2 + y^2 + a(-x) + by = 0$
즉, $x^2 + y^2 - ax + by = 0$
이것이 $x^2 + y^2 + (2-b)x + (2a-4)y = 0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
 $-a = 2 - b, b = 2a - 4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 6, b = 8$
 $\therefore a + b = 6 + 8 = 14$

4. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 푸는데 A는 b 를 잘못 읽어 -4 와 7 을, B는 c 를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$ 를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

A는 a 와 c 를 바르게 읽었으므로

근과 계수와의 관계에서

$$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28, c = -28a$$

B는 a 와 b 를 바르게 읽었으므로

$$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6, b = 6a$$

따라서 원래의 이차방정식은

$$ax^2 + 6ax - 28a = 0$$

근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

5. 연립부등식 $\begin{cases} 4x - 1 < 3x + 5 \\ 6x + a \leq 7x + 1 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 정수의 개수가

2개 일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

▶ 답:

▷ 정답: $4 < a \leq 5$

해설

$4x - 1 < 3x + 5$ 를 풀면 $x < 6$ 이고, $6x + a \leq 7x + 1$ 을 풀면 $a - 1 \leq x$ 이다.
따라서 $a - 1 \leq x < 6$ 을 만족하는 정수의 개수가 2개이기 위해서 $3 < a - 1 \leq 4$, 따라서 $4 < a \leq 5$ 이다.

6. 다음 중 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 6x + k > 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 값이 아닌 것은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 - 6x + k > 0$ 이 성립해야 하므로

이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - k < 0$$

$$\therefore k > 9$$

따라서, k 의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

7. 두 점 A(2, -1), B(6, 3)에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, $\triangle OPQ$ 의 외심의 좌표를 (x, y) 라 할 때, $x+y$ 의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

P(a, 0), Q(0, b)라 하면

$$(2-a)^2 + (-1-0)^2 = (6-a)^2 + (3-0)^2 \dots \textcircled{A}$$

$$(2-0)^2 + (-1-b)^2 = (6-0)^2 + (3-b)^2 \dots \textcircled{B}$$

\textcircled{A} 에서 $a=5$, \textcircled{B} 에서 $b=5$

$\triangle OPQ$ 의 외심을 (x, y) 라 하면

$$x^2 + y^2 = (x-5)^2 + y^2 = x^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore -10x + 25 = 0, -10y + 25 = 0$$

$$\therefore x = y = \frac{5}{2}$$

따라서 외심의 좌표는 $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

$$\therefore x + y = 5$$

8. 직선 $x+y+k=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=0$ 에 접할 때, 실수 k 의 값은?

① ± 2

② $\pm 2\sqrt{2}$

③ ± 3

④ $\pm 3\sqrt{2}$

⑤ $\pm 5\sqrt{2}$

해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \text{ 은}$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

직선 $x+y+k=0$ 과 원

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

가 접하므로

원의 중심과 직선 사이의

거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 한다.

$$\frac{|1-1+k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$|k| = 2 \quad \therefore k = \pm 2$$

9. 직선 $x - 2y + 3 = 0$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하였더니 처음 직선과 일치하였다. 이때, $\frac{2mn}{m^2 + n^2}$ 의 값은? (단, $mn \neq 0$)

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

해설

직선 $x - 2y + 3 = 0$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼,
 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $(x - m) - 2(y - n) + 3 = 0$
즉, $x - 2y - m + 2n + 3 = 0$
이것이 직선 $x - 2y + 3 = 0$ 과 일치하므로
 $-m + 2n + 3 = 3$ 에서 $m = 2n$
 $\therefore \frac{2mn}{m^2 + n^2} = \frac{4n^2}{4n^2 + n^2} = \frac{4n^2}{5n^2} = \frac{4}{5}$

10. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

- ① 28 ② 26 ③ 15 ④ 14 ⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_8 - \text{㉠}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + a_8 - \text{㉡}$$

$$\text{㉠} - \text{㉡} : 26 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$$

11. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 6 - a = 0$ 의 모든 실근이 모두 1보다 클 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $3 < a \leq 7$

② $-3 \leq a < 7$

③ $-7 < a \leq -3$

④ $a \leq 3$ 또는 $a > 7$

⑤ $a < -7$ 또는 $a \geq -3$

해설

이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 6 - a$ 의 그래프를 생각하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6 + a \geq 0, \quad (a+3)(a-2) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -3, a \geq 2 \cdots \text{㉠}$$

$$f(1) = 1 + 2a + 6 - a > 0$$

$$\therefore a > -7 \cdots \text{㉡}$$

$$\text{대칭축 } x = -a \text{ 에서 } -a > 1$$

$$\therefore a < -1 \cdots \text{㉢}$$

$$\text{㉠, ㉡, ㉢의 공통범위는 } -7 < a \leq -3$$

12. 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 실근 α, β 가 $\alpha < 0 < \beta$ 을 만족할 때, a 의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$

② $-\frac{4}{\sqrt{3}} < a < \frac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a > \frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a < -\frac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2 < a < 2$

⑤ $2 < a < \frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\frac{4}{\sqrt{3}} < a < -2$

해설

i) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$$\Rightarrow D = a^2 - 4(a^2 - 4) > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}} < a < \frac{4}{\sqrt{3}}$$

ii) 두 근이 $\alpha < 0 < \beta$ 이려면

$x = 0$ 을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$$\Rightarrow a^2 - 4 < 0$$

$$\Rightarrow -2 < a < 2$$

i), ii)의 공통 범위: $-2 < a < 2$

13. 좌표평면 위의 원점에서 직선 $3x - y + 2 - k(x + y) = 0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3 - k)x - (1 + k)y + 2 = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3 - k)^2 + (1 + k)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$2k^2 - 4k + 10 = 2(k - 1)^2 + 8 \geq 8$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}} \leq \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

\therefore 최대값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. 직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동시켰더니 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 = 0$ 의 공통현을 품는 직선이 되었다. 이 때, $m + k$ 의 값은?

- ① 2 ② -2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

해설

직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면 $y = 2x - 2m$
두 원의 공통현을 품는 직선을 구하면

$$x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 - (x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$4x - ky + 10 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

그런데 ①과 $2x - y - 2m = 0$ 은 일치해야 하므로

$$\frac{4}{2} = \frac{-k}{-1} = \frac{10}{-2m}$$

$$\therefore k = 2, m = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore m + k = -\frac{1}{2}$$

15. 직선 $y = 2x + a$ 를 x 축으로 2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동하면 $x^2 + y^2 = 5$ 와 접한다고 한다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 5 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$f(x : y) \rightarrow (x + 2, y + 1)$$

$$y = 2x + a \xrightarrow{f} (y - 1) = 2 \cdot (x - 2) + a$$

$$y = 2x - 4 + a + 1 = 2x + a - 3$$

직선 $2x - y + (a - 3) = 0$ 과 $(0, 0)$ 과의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|a - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}, |a - 3| = 5$$

$$a - 3 = \pm 5, a = 3 \pm 5$$

$$\therefore a = 8 \quad (\because a > 0)$$

16. $(1-x-x^2)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}$ 라 할 때,
 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{100} = A$, $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99} = B$ 에 대하여
 $A + 2B$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 100 ⑤ 1024

해설

(i) 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{99} + a_{100} \dots \textcircled{1}$
 양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{99} + a_{100} \dots \textcircled{2}$

(ii) $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + \dots + a_{100})$
 $\therefore a_0 + a_2 + \dots + a_{100} = 1$
 $\therefore A = 1$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면
 $0 = 2(a_1 + a_3 + \dots + a_{99})$
 $a_1 + a_3 + \dots + a_{99} = 0 \quad \therefore B = 0$
 $\therefore A + 2B = 1$

17. x 에 관한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여, $(x+1)f(x) = (x-1)g(x)$ 일 때, 다음 중 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최소공배수는?

- ① $(x-1)g(x)$ ② $(x+1)g(x)$ ③ $(x-1)^2g(x)$
④ $(x+1)^2g(x)$ ⑤ $(x-1)^3g(x)$

해설

$(x+1)f(x) = (x-1)g(x) \cdots \textcircled{1}$
 $x+1$ 과 $x-1$ 이 서로 소이므로
 $x+1$ 은 $g(x)$ 의 인수이다.
따라서 $g(x) = (x+1)h(x) \cdots \textcircled{2}$ 로 놓으면
 $\textcircled{1}$ 에서 $f(x) = (x-1)h(x) \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{2}$ 와 $\textcircled{3}$ 에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최소공배수는
 $(x-1)(x+1)h(x)$ 즉, $(x-1)g(x)$

18. x 에 대한 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$ 의 그래프가 실수 k 의 값에 관계없이 직선 $y = 2ax - a^2$ 에 접할 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$ 의 그래프가 직선 $y = 2ax - a^2$ 에 접하므로

이차방정식 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k = 2ax - a^2$

즉, $x^2 - 2(k+a)x + k^2 + a^2 - 4k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (k+a)^2 - (k^2 + a^2 - 4k) = 2ak + 4k = (2a+4)k \text{ 이고}$$

k 의 값에 관계없이 $D = 0$ 이어야 하므로

$$2a + 4 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

19. 두 점 A(2, -2), B(4, 0)과 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프 위의 동점 P에 대하여 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최소일 때의 점 P의 좌표를 (a, b) , 그 때의 넓이의 최솟값을 S 라 할 때, $a + b + S$ 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

직선 AB의 방정식은 $y = \frac{0+2}{4-2}(x-4)$

$\therefore y = x - 4$

직선 AB와 평행하면서

$y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프에 접하는 직선의 방정식을

$y = x + k$ 로 놓으면

$\frac{1}{2}x^2 = x + k$ 에서

$x^2 - 2x - 2k = 0 \dots \textcircled{1}$

$\frac{D}{4} = 1 + 2k = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$

이 값을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$

즉, 점 P의 좌표는 $(1, \frac{1}{2})$ 이고

그 때의 $\triangle ABP$ 의 높이를 h라 하면

이 높이는 점 $(1, \frac{1}{2})$ 과 직선AB,

즉, $x - y - 4 = 0$ 사이의 거리이므로

$h = \frac{\left|1 - \frac{1}{2} - 4\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{4}\sqrt{2}$

이 때, $\overline{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + (0+2)^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{7}{4}\sqrt{2} = \frac{7}{2}$

$\therefore a + b + S = 5$

20. 버스가 P 시와 Q 시 사이를 상, 하행 모두 같은 시간 간격으로 운행하고 있다. P 시에서 Q 시로 자전거를 타고 가는 사람이 어떤 곳에서 상, 하행버스를 동시에 만나고 6분 후에 P 시행의 버스를 만났고, 다시 6분이 지난 후에 Q 시행의 버스에 추월당했다. 버스의 속력이 일정할 때, 버스는 몇분 간격으로 운행되는가?

- ① 6분 ② 8분 ③ 10분 ④ 12분 ⑤ 14분

해설

버스의 속력을 a m/min, 자전거의 속력을 b m/min, 버스의 운행 간격을 t 분이라 하면

$$\begin{cases} 6a + 6b = at \\ 12a - 12b = at \end{cases}$$

$$\therefore a = 3b, t = 8$$

즉, 8분 간격으로 운행된다.