1. 다음 연립부등식의 해를 $a < x < b$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 5x+2 > 3x-4 \\ 2x-1 < -7x+26 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$5x+2 > 3x-4$

$2x > -6$

$\therefore\ x > -3$

$2x-1 < -7x+26$

$9x < 27$

$\therefore\ x < 3$

$-3 < x < 3$ 이므로 $a=-3,\ b=3$

$\therefore\ a+b=0$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+7 \geq 3x \\ x \geq a \end{cases}$ 을 만족하는 정수가 3개일 때, a 의 값의 범위는?

▶ 답 :

▷ 정답 : $4 < a \leq 5$

해설

$2x+7 \geq 3x$ 를 풀면 $x \leq 7$ 이다.

$a \leq x \leq 7$을 만족하는 정수 3 개가 존재하려면 $4 < a \leq 5$ 이다.

3. 원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을
y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x)^2+y^2+a(-x)+by=0$
즉, $x^2+y^2-ax+by=0$
이것이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
$-a=2-b,\ b=2a-4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=8$
$\therefore\ a+b=6+8=14$

4. A, B두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28$, $c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6$, $b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

5. 연립부등식 $\begin{cases} 4x-1<3x+5 \\ 6x+a \le 7x+1 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 정수의 개수가 2개 일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

▶ 답 :

▷ 정답 : $4<a\le 5$

해설

$4x-1<3x+5$ 를 풀면 $x<6$ 이고, $6x+a\le 7x+1$ 을 풀면 $a-1\le x$ 이다.
따라서 $a-1\le x<6$ 을 만족하는 정수의 개수가 2개이기 위해서 $3<a-1\le 4$, 따라서 $4<a\le 5$ 이다.

6. 다음 중 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 6x + k > 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값이 아닌 것은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2 - 6x + k > 0$이 성립해야 하므로
이차방정식$x^2 - 6x + k = 0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - k < 0$$

$\therefore k > 9$

따라서, k의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

7. 두 점 $\mathrm{A}(2,-1)$, $\mathrm{B}(6,3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, $\triangle\mathrm{OPQ}$의 외심의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\mathrm{P}(a,0)$, $\mathrm{Q}(0,b)$라 하면

$(2-a)^2+(-1-0)^2=(6-a)^2+(3-0)^2 \cdots$ ㉠

$(2-0)^2+(-1-b)^2=(6-0)^2+(3-b)^2 \cdots$ ㉡

㉠에서 $a=5$, ㉡에서 $b=5$

$\triangle\mathrm{OPQ}$의 외심을 (x,y)라 하면

$x^2+y^2=(x-5)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$

$\therefore\ -10x+25=0,\ -10y+25=0$

$\therefore\ x=y=\dfrac{5}{2}$

따라서 외심의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

$\therefore\ x+y=5$

8. 직선 $x+y+k=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=0$ 에 접할 때, 실수 k 의 값은?

① ± 2 ② $\pm 2\sqrt{2}$ ③ ± 3

④ $\pm 3\sqrt{2}$ ⑤ $\pm 5\sqrt{2}$

해설

$x^2+y^2-2x+2y=0$ 은

$(x-1)^2+(y+1)^2=2$

직선 $x+y+k=0$ 과 원

$(x-1)^2+(y+1)^2=2$

가 접하므로

원의 중심과 직선 사이의

거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 한다.

$$\frac{|1-1+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$|k|=2 \quad \therefore\ k=\pm 2$

9. 직선 $x-2y+3=0$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하였더니 처음 직선과 일치하였다. 이때, $\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ 의 값은? (단, $mn \neq 0$)

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{4}{5}$ ③ $\dfrac{5}{6}$ ④ $\dfrac{6}{7}$ ⑤ $\dfrac{7}{8}$

해설

직선 $x-2y+3=0$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼,
y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x-m)-2(y-n)+3=0$
즉, $x-2y-m+2n+3=0$
이것이 직선 $x-2y+3=0$ 과 일치하므로
$-m+2n+3=3$ 에서 $m=2n$
$\therefore \dfrac{2mn}{m^2+n^2}=\dfrac{4n^2}{4n^2+n^2}=\dfrac{4n^2}{5n^2}=\dfrac{4}{5}$

10. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28　② 26　③ 15　④ 14　⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면

$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉠

양변에 $x = -1$을 대입하면

$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉡

㉠ – ㉡ : $26 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$

$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$

11. x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+6-a=0$의 모든 실근이 모두 1보다 클 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $3<a\le 7$　　② $-3\le a<7$

③ $-7<a\le -3$　　④ $a\le 3$ 또는 $a>7$

⑤ $a<-7$ 또는 $a\ge -3$

해설

이차함수 $f(x)=x^2+2ax+6-a$의 그래프를 생각하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-6+a\ge 0,\quad (a+3)(a-2)\ge 0$

$\therefore\ a\le -3,\ a\ge 2\cdots$ ㉠

$f(1)=1+2a+6-a>0$

$\therefore\ a>-7\cdots\cdots$ ㉡

대칭축 $x=-a$ 에서 $-a>1$

$\therefore\ a<-1\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통범위는 $-7<a\le -3$

12. 이차방정식 $x^2-ax+a^2-4=0$의 서로 다른 두 실근 α, β가 $\alpha<0<\beta$을 만족할 때, a의 범위를 구하면?

① $a>2$ 또는 $a<-2$

② $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a>\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a<-\frac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2<a<2$

⑤ $2<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<-2$

해설

i) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$\Rightarrow D=a^2-4(a^2-4)>0$

$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

ii) 두 근이 $\alpha<0<\beta$이려면

$x=0$을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow a^2-4<0$

$\Rightarrow -2<a<2$

i), ii) 의 공통 범위 : $-2<a<2$

13. 좌표평면 위의 원점에서 직선$3x-y+2-k(x+y)=0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3-k)x-(1+k)y+2=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3-k)^2+(1+k)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$2k^2-4k+10=2(k-1)^2+8\geq 8$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}\leq\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ 최대값 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

14. 직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동시켰더니 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 = 0$ 의 공통현을 품는 직선이 되었다. 이 때, $m + k$ 의 값은 ?

① 2 ② -2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

해설

직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면 $y = 2x - 2m$
두 원의 공통현을 품는 직선을 구하면
$x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 - (x^2 + y^2 - 9) = 0$
$4x - ky + 10 = 0 \cdots$ ①
그런데 ①과 $2x - y - 2m = 0$은 일치해야 하므로

$$\frac{4}{2} = \frac{-k}{-1} = \frac{10}{-2m}$$

$$\therefore\ k = 2,\ m = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore\ m + k = -\frac{1}{2}$$

15. 직선 $y = 2x + a$ 를 x 축으로 2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동하면 $x^2 + y^2 = 5$와 접한다고 한다. 이 때, 양수 a의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 5 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x : y) \quad \rightarrow \quad (x + 2,\ y + 1)$

$y = 2x + a \ \xrightarrow{f} (y - 1) = 2 \cdot (x - 2) + a$

$y = 2x - 4 + a + 1 = 2x + a - 3$

직선 $2x - y + (a - 3) = 0$ 과 $(0,\ 0)$ 과의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|a - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5},\ |a - 3| = 5$

$a - 3 = \pm 5,\ a = 3 \pm 5$

$\therefore\ a = 8 \ (\because\ a > 0)$

16. $(1-x-x^2)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}$라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = A$, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = B$에 대하여 $A + 2B$의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 100 ⑤ 1024

해설

(i) 양변에 $x = 1$을 대입하면

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} \cdots$ ㉠

양변에 $x = -1$을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{99} + a_{100} \cdots$ ㉡

(ii) ㉠+㉡ 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{100})$

$\therefore\ a_0 + a_2 + \cdots + a_{100} = 1$

$\therefore\ A = 1$

㉠ − ㉡하면

$0 = 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{99})$

$a_1 + a_3 + \cdots + a_{99} = 0 \quad \therefore\ B = 0$

$\therefore\ A + 2B = 1$

17. x에 관한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여, $(x+1)f(x) = (x-1)g(x)$ 일 때, 다음 중 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는?

① $(x-1)g(x)$ ② $(x+1)g(x)$ ③ $(x-1)^2g(x)$

④ $(x+1)^2g(x)$ ⑤ $(x-1)^3g(x)$

해설

$(x+1)f(x) = (x-1)g(x) \cdots$ ①

$x+1$과 $x-1$이 서로 소이므로

$x+1$은 $g(x)$의 인수이다.

따라서 $g(x) = (x+1)h(x) \cdots$ ② 로 놓으면

①에서 $f(x) = (x-1)h(x) \cdots$ ③

②와 ③에서 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는

$(x-1)(x+1)h(x)$ 즉, $(x-1)g(x)$

18. x에 대한 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 직선 $y = 2ax - a^2$에 접할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$ 의 그래프가 직선 $y = 2ax - a^2$ 에 접하므로

이차방정식 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k = 2ax - a^2$

즉, $x^2 - 2(k + a)x + k^2 + a^2 - 4k = 0$ 의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4} = (k + a)^2 - (k^2 + a^2 - 4k) = 2ak + 4k = (2a + 4)k$ 이고

k 의 값에 관계없이 $D = 0$ 이어야 하므로

$2a + 4 = 0$

$\therefore a = -2$

19. 두 점 A$(2,-2)$, B$(4,0)$과 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 동점 P에 대하여 △ABP의 넓이가 최소일 때의 점 P의 좌표를 (a,b), 그 때의 넓이의 최솟값을 S라 할 때, $a+b+S$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

직선 AB의 방정식은 $y=\frac{0+2}{4-2}(x-4)$

$\therefore y=x-4$

직선 AB와 평행하면서

$y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을

$y=x+k$로 놓으면

$\frac{1}{2}x^2=x+k$에서

$x^2-2x-2k=0 \cdots$ ㉠

$\frac{D}{4}=1+2k=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$

즉, 점 P의 좌표는 $(1, \frac{1}{2})$이고

그 때의 △ABP의 높이를 h라 하면

이 높이는 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$과 직선AB ,

즉, $x-y-4=0$ 사이의 거리이므로

$$h=\frac{\left|1-\frac{1}{2}-4\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{7}{4}\sqrt{2}$$

이 때,

$\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{2}$이므로

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{7}{4}\sqrt{2}=\frac{7}{2}$

$\therefore a+b+S=5$

20. 버스가 P시와 Q시 사이를 상, 하행 모두 같은 시간 간격으로 운행하고 있다. P시에서 Q시로 자전거를 타고 가는 사람이 어떤 곳에서 상, 하행버스를 동시에 만나고 6분 후에 P시행의 버스를 만났고, 다시 6분이 지난 후에 Q시행의 버스에 추월당했다. 버스의 속력이 일정할 때, 버스는 몇분 간격으로 운행되는가?

① 6분 ② 8분 ③ 10분 ④ 12분 ⑤ 14분

해설

버스의 속력을 a m/min, 자전거의 속력을 b m/min, 버스의 운행 간격을 t분이라 하면

$$\begin{cases} 6a+6b=at \\ 12a-12b=at \end{cases}$$

$\therefore a=3b,\ t=8$

즉, 8분 간격으로 운행된다.