

1. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b 의 값은?

- ① $a = 1, b = 2$ ② $a = 0, b = 3$ ③ $a = -1, b = 2$
④ $a = 0, b = 2$ ⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 판별식이 0이다.

$$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2ak + a^2 - b + 3 = 0$$

모든 k 에 대해 성립하려면

$$-2a = 0, \quad a^2 - b + 3 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 3$$

2. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

3. 두 다항식 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$, $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -21 ② -15 ③ -5 ④ -1 ⑤ 0

해설

$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.
 $\therefore a = b \quad \therefore a - b = 0$

4. 모든 모서리의 합이 36, 겹넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 하자.

$$4(a + b + c) = 36, \quad 2(ab + bc + ca) = 56$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 81 - 56 = 25$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{대각선의 길이}) &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

5. x 의 다항식 $x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때, 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때,
몫을 $x + q$ 라 하면 (일반적으로 $px + q$ 로 해야겠지만 x^3 의 계수가 1이므로 $x + q$)

$$x^3 + ax + b = (x^2 - 3x + 2)(x + q) + 2x + 1$$

$$\therefore x^3 + ax + b = (x - 2)(x - 1)(x + q) + 2x + 1$$

이 등식은 x 에 관한 항등식이므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + a + b = 2 + 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 8 + 2a + b = 4 + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = -5, b = 7$$

$$\therefore a + b = 2$$

6. 다항식 $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 2$ 를 $x-1$ 로 나누면 나누어떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 2 라고 한다. mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f(1) = 1 + m + n + 2 = 0, m + n = -3$$

$$f(-1) = -1 + m - n + 2 = 2, m - n = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $m = -1, n = -2$

$$\therefore mn = 2$$

7. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지가 -2 이고, $x-2$ 로 나눈 나머지가 1 일 때, $f(x)$ 를 $(x+1)(x-2)$ 로 나눈 나머지는?

① $2x+1$

② $x+1$

③ $x-1$

④ $2x-1$

⑤ $3x+2$

해설

$$f(x) = (x+1)Q_1(x) - 2$$

$$f(x) = (x-2)Q_2(x) + 1$$

$$f(x) = (x+1)(x-2)Q_3(x) + ax + b$$

$$f(-1) = -a + b = -2, \quad f(2) = 2a + b = 1$$

$$\therefore a = 1, \quad b = -1$$

구하는 나머지는 $x-1$

8. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$ 를 x^2+2x-3 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x) + 3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x) + 2\} + 3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x) + 2(x-1) + 3 \\ &= (x^2 + 2x - 3)Q'(x) + 2x + 1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

9. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \text{ 을 변형하면} \\(\text{준식}) &= (1 - z)(1 - x)(1 - y) \\&= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz \\&= 1 - 1 + 2 - 3 = -1\end{aligned}$$

10. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 8$ 이고, 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

해설

두 식 A, B 의 최대공약수를 G 라 하면

$A = Ga, B = Gb(a, b$ 는 서로소)

$A + B = (a + b)G = 2(x + 2)(x - 2)$

$L = abG = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

$\therefore G = x + 2$

11. 복소수 $a^2(1+i) + a(3+2i) + 2$ 를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$$(\text{준식}) = (a^2 + 3a + 2) + (a^2 + 2a)i \Rightarrow \text{순허수}$$

$$\text{즉, } a^2 + 3a + 2 = 0$$

$$a^2 + 2a \neq 0 \text{ 이므로 } \therefore a = -1$$

12. 임의의 복소수 a, b 에 대하여 연산 $\square$ 를 $a\square b = (a+b) - ab$ 로 정의할 때, $z\square i = 3 + 2i$ 를 만족하는 복소수 z 는?

① $-1 + 2i$

② $1 + 2i$

③ $3 + 2i$

④ $5 + 2i$

⑤ $7 + 2i$

해설

$$z\square i = z + i - zi = (1-i)z + i \text{ 에서}$$

$$(1-i)z + i = 3 + 2i$$

$$(1-i)z = 3 + i$$

$$\therefore z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$$

13. 이차방정식 $x^2 + 5(a-1)x - 24a = 0$ 의 두 근의 비가 2 : 3일 때, 실수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 근을 $\alpha = 2k$, $\beta = 3k$ 라고 하면

$$\alpha + \beta = 2k + 3k = -5(a-1)$$

$$\alpha\beta = 2k \times 3k = -24a$$

$$\therefore k = 1-a, \quad k^2 = -4a$$

$a = 1-k$ 를 대입하면

$$k^2 + 4(1-k) = k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2 = 0$$

$$\therefore k = 2$$

$$\therefore a = -1$$

해설

14. $2x + y = 3$ 일 때, $x^2 + xy + 1$ 의 최댓값을 구하면?

- ① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

해설

$2x + y = 3$ 에서 $y = -2x + 3$ 이다.

$$x^2 + xy + 1 = x^2 + x(-2x + 3) + 1$$

$$= -x^2 + 3x + 1$$

$$= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$

따라서 최댓값은 $\frac{13}{4}$ 이다.

15. 이차함수 $y = x^2 + 4ax + b$ 가 $x = 2$ 에서 최솟값 6 을 가질 때, $a + b$ 의 값은?

① -9

② -6

③ 6

④ 9

⑤ 14

해설

$$y = x^2 + 4ax + b = (x + 2a)^2 - 4a^2 + b$$

$x = 2$ 일 때, 최솟값이 6 이므로

$$y = (x - 2)^2 + 6 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } 2a = -2, a = -1$$

$$-4a^2 + b = 6, b = 10$$

$$\therefore a + b = 9$$

16. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \leq a \leq 2$)

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$0 \leq \frac{a}{2} \leq 1$ 이므로

$$\text{최솟값 } m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4},$$

$$\text{최댓값 } M = f(3) = 9 - 3a$$

$$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a + 6)^2 + 18$$

이때, $0 \leq a \leq 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

17. $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ 을 바르게 인수분해 한 것을 찾으려면?

- ① $(x^2 + 1)(x + 3)(x + 1)$ ② $(x^2 + 1)(x + 3)(x - 1)$
③ $(x^2 + 1)(x - 3)(x - 1)$ ④ $(x^2 - 3)(x - 1)(x + 1)$
⑤ $(x^2 + 3)(x - 1)(x + 1)$

해설

$$\begin{aligned} & x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 \\ &= (x^4 - 2x^2 - 3) + 2x^3 + 2x \\ &= (x^2 - 3)(x^2 + 1) + 2x(x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + 2x - 3) \\ &= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

18. 세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형에 대하여 $(a^2 + b^2)c + (a + b)c^2 = (a + b)(a^2 + b^2) + c^3$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?
- ① $b = c$ 인 이등변 삼각형 ② a 가 빗변인 직각삼각형
③ $a = c$ 인 이등변 삼각형 ④ c 가 빗변인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

준식을 c 에 관한 내림차순으로 정리하면
 $c^3 - (a + b)c^2 - (a^2 + b^2)c + (a + b)(a^2 + b^2)$ 에서
 $c^2\{c - (a + b)\} - (a^2 + b^2)\{c - (a + b)\}$
 $= \{c - (a + b)\}\{c^2 - (a^2 + b^2)\}$
 $= (c - a - b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$
 a, b, c 는 삼각형의 세변이므로
 $c - a - b \neq 0$ 이고 $c^2 - a^2 - b^2 = 0$
즉 $c^2 = a^2 + b^2$ 이므로 c 가 빗변인 직각 삼각형이다.

19. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

- ① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i} = i$ 이므로

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

20. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$ 을 만족하는 양수 x 에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$ 의 값은?

① 4

② 2

③ -1

④ 5

⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x 를 구하면

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$$

$$4x - \sqrt{41} = -1, \quad 2x^2 + x = 5$$

$$(\text{준식}) = (-1)^2 + (2x^2 + x - 1) = 1 + (5 - 1) = 5$$

21. 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때 $x^2 - (2a+1)x + 2 = 0$ 의 두 근은 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 이다. 이때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

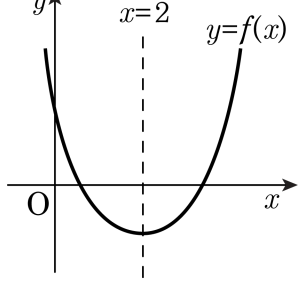
▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
또, $x^2 - (2a+1)x + 2 = 0$ 의 두 근이 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 이므로
 $\alpha + \beta + \alpha\beta = 2a + 1, (\alpha + \beta)\alpha\beta = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a + b = 2a + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$
 $ab = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$
 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 를 연립하여 풀면
 $a = 1, b = 2$ 또는 $a = -2, b = -1$

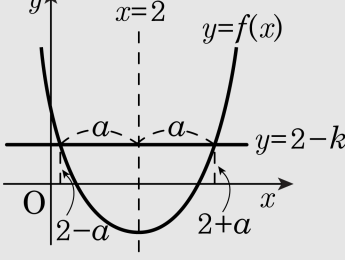
22. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x 에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$ 의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면
 $f(t) = 0$ 을 만족시키는 두 실근은
 $t = 2 - k$ 또는 $t = 2 + k$
 $(0 < k < 2)$ 로 놓을 수 있다.
 $\therefore f(x) = 2 - k$ 또는 $f(x) = 2 + k$



(i) $f(x) = 2 - k$ 를 만족시키는 x 의 값은
 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = 2 - k$ 의 교점의 x 좌표이므로
 $x = 2 - a$ 또는 $x = 2 + a$
(ii) $f(x) = 2 + k$ 를 만족시키는 x 의 값도
마찬가지로 생각하면 $x = 2 - \beta$ 또는 $x = 2 + \beta$
따라서 $f(f(x)) = 0$ 을 만족시키는 모든 실근의 합은
 $(2 - a) + (2 + a) + (2 - \beta) + (2 + \beta) = 8$

23. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$$y^2 - 2y + (x^2 + 2x - 2) = 0$$

x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

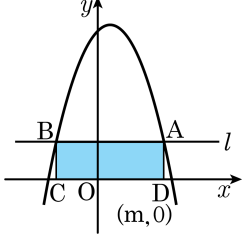
$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (x^2 + 2x - 2) \geq 0$$

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0, (x + 3)(x - 1) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq x \leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

24. $y = -x^2 + x + 6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레의 길이의 최댓값은? $\left(\frac{1}{2} < m < 3\right)$



- ① $\frac{11}{2}$
- ② $\frac{31}{4}$
- ③ 10
- ④ $\frac{49}{4}$
- ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y = -x^2 + x + 6 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m, -m^2 + m + 6)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2\left(m - \frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2 + m + 6$

(□ABCD둘레의 길이)

$$= 2\left[2\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2 + m + 6\right]$$

$$= 2(2m - 1 - m^2 + m + 6)$$

$$= 2(-m^2 + 3m + 5)$$

$$= -2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{29}{2}$$

$m = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

25. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

- ① -8
- ② -4
- ③ 0
- ④ 4
- ⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.
i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$
ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$
iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$
iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.
 $a = 1, b = 4, c = 6, d = 4, e = 1$
 $\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$
(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$
다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

1		1	0	0	0	0
			1	1	1	1
1		1	1	1	1	<u>1</u> = e
			1	2	3	
1		1	2	3	<u>4</u> = d	
			1	3		
1		1	3	<u>6</u> = c		
			1			
a=1		<u>4</u> = b				

$\therefore 2c - bd = -4$