1. $x+y=4,\ xy=3$ 일 때, x^2-xy+y^2 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 7

해설

$$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=7$$

2. 다항식 x^3+5x^2-kx-k 가 $x-1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

인수정리에 의해서 $x=1$ 을 대입하면

$1^3+5\times1^2-k\times1-k=0$

$\therefore\ k=3$

3. 이차방정식 $2x^2-4x+5=0$의 두 근을 α와 β라 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은?

① -7 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 7

해설

$2x^2-4x+5=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{5}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\times\frac{5}{2}\times 2\\ &= 8-15=-7\end{aligned}$$

4. 다음 중 $a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c$의 인수인 것은?

① $a - b + c$ ② $c - a$ ③ $b + c$

④ $a - b$ ⑤ $c - b + a$

해설

$$\begin{aligned} a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c &= a^3 - ab^2 + a^2c - b^2c \\ &= a(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)c \\ &= (a - b)(a + b)(a + c) \end{aligned}$$

5. $(a-b+c)(a+b-c)$를 전개한 식은?

① $a^2+b^2+c^2-2bc$
② $a^2-b^2+c^2-2bc$
③ $a^2-b^2-c^2+2bc$
④ $a^2+b^2-c^2-2bc$
⑤ $a^2+b^2+c^2+2bc$

해설

$$(a-b+c)(a+b-c)$$
$$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$$
$$=a^2-(b-c)^2$$
$$=a^2-b^2-c^2+2bc$$

6. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$

$$=a+1=2000$$

7. 두 다항식 x^3+1, x^3+2x^2-5x-6의 최대공약수를 구하면?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x-1$ ⑤ $x-2$

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)$

따라서 최대공약수는 $x+1$

8. 등식 $3x-2yi=(2+i)^2$ 이 성립하는 x, y에 대하여 두 수를 곱하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$3x-2yi=(2+i)^2=3+4i$

$x=1,\quad y=-2$

$\therefore\ xy=-2$

9. $i^{2000}+i^{2002}+i^{2003}+i^{2004}$ 의 값을 구하면?

① 1　② $1-i$　③ $1+i$　④ -1　⑤ 0

해설

$i^4=1$ 이므로

$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$

(준식) $=1+(-1)+(-i)+1$

$=1-i$

10. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 등식 $(1-2i)z - i\bar{z} = 3-5i$ 를 만족하는 z 는?

① $1+i$　　② $2+i$　　③ $2+2i$

④ $1-i$　　⑤ $2-i$

해설

$z = a+bi$ 라 하면 $\bar{z} = a-bi$ 이므로

$(1-2i)(a+bi) - i(a-bi) = a+bi-2ai+2b-ai-b$

$= (a+b)+(-3a+b)i = 3-5i$

따라서 $a+b=3$, $-3a+b=-5$ 이므로 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

따라서 $z=2+i$ 이다.

11. 다음 <보기>에서 계산 중 <u>잘못된</u> 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$

∴ 옳지 않다.

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$

∴ 옳다.

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

∴ 옳지 않다.

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$

∴ 옳다.

12. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2$ $\therefore\ a + b = 14$

13. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2)\div(\square x^2+\square x+\square)=x+2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\square x^2+\square x+\square=A$라 하면

$(x^3+4x^2+3x-2)\div A=x+2$

$\therefore\ A=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)$

$\therefore\ A=x^2+2x-1$이므로

$\square$안에 알맞은 수는 차례대로 $1,\ 2,\ -1$이다.

14. 실수 x, y가 $xy=6$, $x^2y+xy^2+x+y=63$을 만족시킬 때, x^2+y^2의 값은?

① 13 ② $\dfrac{1173}{32}$ ③ 55 ④ 69 ⑤ 81

해설

$$\begin{aligned}
&x^2y+xy^2+x+y\\
&=xy(x+y)+(x+y)\\
&=(xy+1)(x+y)\\
&=7(x+y)=63,\\
&x+y=9,\ xy=6\\
&\therefore\quad x^2+y^2=(x+y)^2-2xy\\
&\qquad\qquad\ \ =81-12=69
\end{aligned}$$

15. 이차방정식 $x^2+3x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^4+\beta^4$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 161

해설

$\alpha+\beta=-3, \alpha\beta=-2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=13$

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

$=(13)^2-2\alpha^2\beta^2$

$=(13)^2-2(-2)^2=161$

16. 이차함수 $y = kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 정수 k의 값들의 합은?

① -3 ② -5 ③ 7 ④ 3 ⑤ 5

해설

이차방정식 $kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2 = 0$이
서로 다른 두 실근을 가지므로
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\sqrt{2})^2 - k(k+2) > 0$$

$8 - k^2 - 2k > 0$, $(k+4)(k-2) < 0$

$\therefore\ -4 < k < 2$

따라서 정수 k는 $-3, -2, -1, 0, 1$이다.

$\therefore\ (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$

17. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$의 그래프는 x축과 만나고, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$의 그래프는 x축과 만나지 않는다. 이때, 정수 k의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$의 그래프는
x축과 만나므로
$x^2 + 2kx + 1 = 0$의 판별식을 D_1이라 할 때,
$\frac{D_1}{4} = k^2 - 1 \geq 0$, $(k+1)(k-1) \geq 0$
$\therefore\ k \leq -1$ 또는 $k \geq 1 \cdots$ ㉠
또, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$의 그래프는
x축과 만나지 않으므로
$-x^2 + kx + 2k = 0$의 판별식을 D_2라 할 때,
$D_2 = k^2 + 8k < 0$, $k(k+8) < 0$
$\therefore\ -8 < k < 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $-8 < k \leq -1$
따라서 정수 k는 $-7,\ -6,\ \cdots, -2,\ -1$의 7개이다.

18. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$, $y = x + 1$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m의 범위를 정하면?

① $m < -2,\ \ m > \dfrac{2}{3}$
② $m < -1,\ \ m > \dfrac{2}{3}$
③ $m < -2,\ \ m > 2$
④ $m < 2,\ \ m > \dfrac{2}{3}$
⑤ $m < -5,\ \ m > \dfrac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$을 항상 만족하도록 m을 정하면 된다.

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$에서

판별식 $D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0$, $(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$

$(3m-2)(m+2) > 0$

$\therefore\ \ m < -2$, $m > \dfrac{2}{3}$

(참고) $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ ······ ㉠

$y = x + 1$ ······ ㉡

㉡의 그래프는 그 위치가 고정되어 있지만 ㉠의 그래프는 m의 값이 변함에 따라 그 위치가 변한다.

이를테면 $m = 0$, $m = 1$일 경우에 대해서 생각해 보자.

(i) $m = 0$ 일 경우 ㉠은 $y = x^2 - x + 1$이므로
이 때에는 ㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 위에 있는 x의 범위는 부등식 $x^2 - x + 1 > x + 1$을 만족하는 x의 범위와 같다.

(ii) $m = 1$ 일 경우 ㉠은 $y = x^2 + 2$이므로
이 때에는 ㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 항상 위에 있으므로 ㉠이 ㉡보다 항상 위에 있는 x의 범위는 x의 모든 실수값이다.

이 문제의 경우는 (ii) 같이 되도록 m의 범위를 정하라는 것이다.

㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$

곧, $x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$이 x의 모든 실수값에 대하여 항상 성립하면 된다.

이 결과는 ㉠, ㉡의 그래프가 만나지 않도록 m의 범위를 정한 것과 같다.

그러나 일반적으로 직선과 포물선이 만나지 않는 경우에는 직선이 포물선보다 항상 위쪽에 있는 경우도 있으므로

'포물선이 직선보다 위쪽에 있다' 는 것과 '포물선과 직선이 만나지 않는다' 는 것과는 그 뜻이 다르다.

19. 두 곡선 $y=x^2$과 $y=-x^2+2x-5$에 동시에 접하는 접선은 두 개가 있다. 이 두 접선의 y절편의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y=x^2$ 위의 접점을 $(t,\ t^2)$으로 놓으면

$y'=2x$이므로 $y'_{x=t}=2t$는 접선의 기울기이다.

따라서 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)\cdots$ ㉠

㉠이 곡선 $y=-x^2+2x-5$에도 접하므로

$2tx-t^2=-x^2+2x-5$ 에서

$x^2+2(t-1)x+(5-t^2)=0\cdots$ ㉡

㉡의 판별식 $\dfrac{D}{4}=0$이므로

$(t-1)^2-(5-t^2)=0$에서

$(t+1)(t-2)=0 \quad \therefore\ t=-1,\ 2$

㉠에서

$t=-1$일 때, $y=-2x-1$

$t=2$일 때, $y=4x-4$

따라서 두 y절편의 곱은 $(-1)\cdot(-4)=4$

20. 이차함수 $y=x^2-px+q$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나고, x축과 단 한 점에서 만나도록 $p,\ q$의 값을 정할 때, $p+q$의 값으로 가능한 수는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$y=x^2-px+q \cdots$ ㉠의 그래프는
점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $1=1-p+q$
$\therefore\ p=q \cdots$ ㉡
또, ㉠의 그래프가 x축과 단 한 점에서 만나므로,
㉠에서 $y=0$으로 한 이차방정식
$x^2-px+q=0$은 중근을 갖는다.
따라서 판별식을 D라 하면
$D=p^2-4q=0 \cdots$ ㉢
㉡, ㉢에서 $p^2-4p=0$
$\therefore\ p(p-4)=0 \qquad \therefore\ p=0,\ 4$
$\therefore\ p=0,\ q=0$ 또는 $p=4,\ q=4$

21. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=7$, $x+y=3$ 일 때, x^5+y^5의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ 에서 $3^2=7+2xy,\ xy=1$
$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ 에서 $x^3+y^3=18$

$$\begin{aligned} x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y) \\ &= 7\times 18-1^2\times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

22. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c가 $b^3-ac^2+a^2b+ab^2+a^3-bc^2=0$인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형
② 직각삼각형
③ 이등변삼각형
④ 둔각삼각형
⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$-(a+b)c^2+a^3+a^2b+b^3+ab^2=0$

$-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)=0$

$-(a+b)(c^2-a^2-b^2)=0$

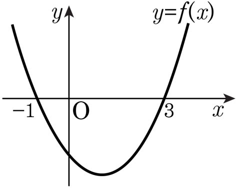
$(a+b\neq 0)$

$c^2-a^2-b^2=0$

$\therefore c^2=a^2+b^2$

$\therefore\ C=90°$인 직각삼각형

23. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근의 합은?



① -1 ② 0 ③ 1

④ 2 ⑤ 3

해설

$y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 $-1,\ 3$이므로

$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$으로 놓을 수 있다.

이때, $f(2x-1)\ =\ a(2x-1+1)(2x-1-3)\ =\ 4ax(x-2)$이므로

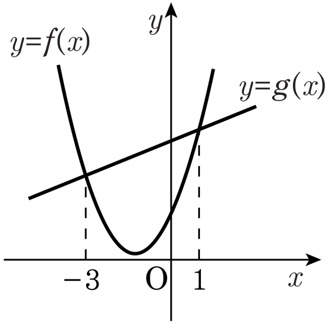
$f(2x-1)=0$에서

$4ax(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 두 근의 합은 2이다.

24. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x)=2x^2+ax+4$, $g(x)=cx+d$ 의 그래프가 $x=1$ 과 $x=-3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y=f(x)-g(x)$ 의 최솟값은?



① -8 ② -6 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$2x^2+ax+4=cx+d$

$\Rightarrow 2x^2+(a-c)x+4-d=0 \cdots$ ㉠

근이 $-3, 1$ 이므로

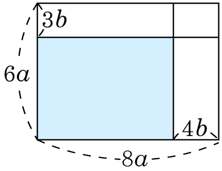
$2(x+3)(x-1)=0$ 과 일치한다.

㉠과 비교하면 $a-c=4, d=10$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)-g(x) &= 2x^2+(a-c)x+4-d \\ &= 2x^2+4x-6 \\ &= 2(x+1)^2-8\end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 : -8

25. 다음 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이는?



① $6a^2 - 7ab + 2b^2$

② $36a^2 - 42ab + 12b^2$

③ $48a^2 - 48ab + 12b^2$

④ $12a^2 - 12ab + 3b^2$

⑤ $48a^2 + 48ab + 12b^2$

해설

$(6a - 3b)(8a - 4b) = 48a^2 - 48ab + 12b^2$