1. 다음 중에서 성립하지 않는 것은?

① $a^2 \geq 0$ ② $a^2 + b^2 \geq 0$

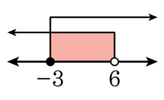
③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

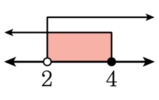
⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$

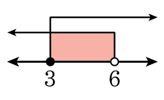
해설

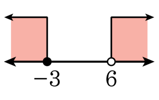
① $a^2 \geq 0$ (항상 성립)
② $a^2 + b^2 \geq 0$ (항상 성립)
③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (항상 성립)
④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (항상 성립)
⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$
(반례 : $a > 0$, $b < 0$이면 $a > b$이지만 $ab < 0$이다.)

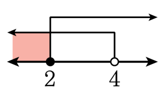
2. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-3<9 \\ 4x+1 \geq x-8 \end{cases}$ 의 해를 수직선에 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$\begin{cases} 2x-3<9 \rightarrow x<6 \\ 4x+1 \geq x-8 \rightarrow x \geq -3 \end{cases}$

$\therefore -3 \leq x < 6$

3. 수직선 위의 두 점 A(-3), B(6)에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $3:2$로 외분하는 점을 Q라 한다. 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 21

해설

$\frac{2\times6+1\times(-3)}{2+1}=3$에서 P$(3)$

$\frac{3\times6-2\times(-3)}{3-2}=24$에서 Q$(24)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=|24-3|=21$

4. 길이가 6인 선분을 같은 방향으로 $2:1$로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

길이가 6인 선분을 OA라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A의 좌표는 $(6, 0)$
이 선분을 $2:1$로 내분하는 점 $\mathrm{P}(x_1)$라 하면
$x_1 = \dfrac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2+1} = 4$
$2:1$로 외분하는 점 $\mathrm{Q}(x_2)$라 하면
$x_2 = \dfrac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2-1} = 12$
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}} = 12 - 4 = 8$

5. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 A(−1, −2), B(6, 4), D(0, 2)이고, $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C의 좌표는?

① C(5, 0) ② C(0, 5) ③ C(7, 8)
④ C(8, 7) ⑤ C(7, 6)

해설
C(a, b) 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점은 같다.
$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right) = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$
$-1+a=6, \ -2+b=6$
$\therefore \ a=7, \ b=8$
$\therefore$ C(7, 8)

6. 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 을 x 축의 방향으로 2 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 원의 방정식을 구하여라.

① $(x+2)^2 + (y+1)^2 = r^2$

② $(x-1)^2 + (y+2)^2 = r^2$

③ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = r^2$

④ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$

⑤ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = r^2$

해설

원 $x^2 + y^2 = r^2 \cdots$ ①

위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}(x',\ y')$이라 하면

$$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'-3 \end{cases} \cdots ②$$

②를 ①에 대입하면 $(x'-2)^2 + (y'-3)^2 = r^2$

점 $\mathrm{P}(x',\ y')$는 평행이동한 원 위의 임의의 점이므로

구하는 방정식은 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$ 이다.

7. 이차방정식 $x^2+2(k-11)x-k+3=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절댓값보다 크기 위한 정수 k의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

두 근을 α, β라 할 때,

$\alpha\beta=-k+3<0$, $\alpha+\beta=-2(k-11)>0$

$\therefore$ $3<k<11$

8. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

① $x = 2\sqrt{5},\ y = -\sqrt{5}$
② $x = -2\sqrt{5},\ y = \sqrt{5}$
③ $x = \frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
④ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
⑤ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$에서
$(x - y)(x + 2y) = 0$
i) $x = y$일 때
$x^2 + y^2 = 2y^2 = 25$
$y = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2},\quad x = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$
ii) $x = -2y$일 때
$x^2 + y^2 = 5y^2 = 25$
$y^2 = 5,\ y = \pm\sqrt{5},\ x = \mp 2\sqrt{5}$ (복호동순)
$\therefore$ 구하는 해는$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},\ -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$,
$(-2\sqrt{5},\ \sqrt{5})$, $(2\sqrt{5},\ -\sqrt{5})$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x+y$의 값을 a, b라 할 때, $a-b$의 값은? (단, x, y는 양수, $a>b$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots$ ㉠
$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots$ ㉡
㉡ 식+2×㉠식에 대입하면
$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \ (3x-y)(2x-3y) = 0$
$\therefore\ 3x = y \ \ or \ \ 2x = 3y$
㉮: $3x = y$를 ㉠식에 대입하면
$7x^2 = 7 \ x = 1(x>0), \quad y = 3$
$\therefore\ x + y = 4$
㉯: $2x = 3y$를 4×㉠식에 대입하면
$7y^2 = 28, \ \ y^2 = 4, y = 2(y>0), \ x = 3$
$\therefore\ x + y = 5$
$a > b$이므로 $a = 5, b = 4$
$\therefore\ a - b = 1$

10. 다음 세 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수는 모두 몇 개인가?

㉠ $-\frac{3}{2}x+6 \geq -9$	㉡ $3(5-x)+4x \geq 5$
㉢ $0.4x+1.2 > 0.9x-0.8$	

① 10개 ② 11개 ③ 12개 ④ 13개 ⑤ 14개

해설

㉠ $-\frac{3}{2}x+6 \geq -9$

$\therefore\ x \leq 10$

㉡ $3(5-x)+4x \geq 5$

$\therefore\ x \geq -10$

㉢ $0.4x+1.2 > 0.9x-0.8$

$\therefore\ x < 4$

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 정수는 14개이다.

11. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{3x-5}{8} < -1 \\ 1.5x + 3.9 > -0.6 + 0.6x \end{cases}$ 을 만족하는 정수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : -2

해설

$\begin{cases} \dfrac{3x-5}{8} < -1 \\ 1.5x + 3.9 > -0.6 + 0.6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > -5 \end{cases}$

따라서 $-5 < x < -1$을 만족하는 정수는 $-4, -3, -2$ 이다.

12. 연립부등식 $\begin{cases} 5x-7<2x+2 \\ 2x+a>-x-4 \end{cases}$ 를 풀었더니 해가 $1<x<b$ 가 되었다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

연립부등식을 각각 풀면

$5x-7<2x+2$ 에서 $x<3$ 이므로 $b=3$

$2x+a>-x-4$ 에서 $x>\dfrac{-4-a}{3}$ 이므로

$\dfrac{-4-a}{3}=1$

그러므로 $a=-7$ 이 된다.

따라서 $a+b$ 의 값은 $-7+3=-4$ 이다.

13. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수해는 몇 개인가?

① 7 개 ② 6 개 ③ 5 개 ④ 4 개 ⑤ 3 개

해설

$x^2 - x - 6 \le 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+2) \le 0$

$\Rightarrow -2 \le x \le 3 \quad \cdots$ ①

$x^2 - 5x + 4 > 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-4) > 0$

$\Rightarrow x < 1$ 또는 $x > 4 \quad \cdots$ ②

①, ②의 공통범위는 : $-2 \le x < 1$

$\therefore$ 정수의 해 : $-2,\ -1,\ 0$

14. 원 $x^2+y^2+4x+6y+12=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 원 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 과 겹칠 때, a^2+b^2 의 값은?

① 25 ② 32 ③ 34 ④ 41 ⑤ 50

해설

$x^2+y^2+4x+6y+12=0$ 에서
$(x+2)^2+(y+3)^2=1 \cdots$ ㉠
$x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 에서
$(x-1)^2+(y-2)^2=1 \cdots$ ㉡
㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$(x-a+2)^2+(y-b+3)^2=1$
이 원이 ㉡과 겹쳐지므로
$-a+2=-1$, $-b+3=-2$
$\therefore a=3$, $b=5$
$\therefore a^2+b^2=34$

15. 세 변의 길이가 $a,\ b,\ c$인 삼각형에 대하여 $(a^2+b^2)c+(a+b)c^2=(a+b)(a^2+b^2)+c^3$이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $b=c$인 이등변 삼각형
② a가 빗변인 직각삼각형
③ $a=c$인 이등변 삼각형
④ c가 빗변인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

준식을 c에 관한 내림차순으로 정리하면
$c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+(a+b)(a^2+b^2)$에서
$c^2\{c-(a+b)\}-(a^2+b^2)\{c-(a+b)\}$
$=\{c-(a+b)\}\{c^2-(a^2+b^2)\}$
$=(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$
a ,b ,c 는 삼각형의 세변이므로
$c-a-b\neq 0$이고 $c^2-a^2-b^2=0$
즉 $c^2=a^2+b^2$이므로 c가 빗변인 직각 삼각형이다.

16. 두 다항식 x^3+px^2+qx+1과 x^3+qx^2+px+1의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A=x^3+px^2+qx+1$, $B=x^3+qx^2+px+1$이라고 하면

$$\begin{aligned}A-B&=(x^3+px^2+qx+1)-(x^3+qx^2+px+1)\\&=(p-q)x^2-(p-q)x\\&=(p-q)x(x-1)\end{aligned}$$

이 때, $A-B$는 두 다항식 A, B의 최대공약수를 인수로 갖는다.
그런데, $p=q$이면 $A=B$가 되어 최대공약수가 x에 대한 삼차식이 되므로 최대공약수가 x에 대한 일차식이라는 조건에 모순이다.
또한, 두 다항식 A, B의 상수항이 모두 1이므로 x를 인수로 가질 수 없다.
따라서, $x-1$이 두 다항식 A, B의 최대공약수이고, 최대공약수는 A, B의 인수이므로 $x=1$을 두 다항식에 각각 대입하면 그 값이 0이어야 한다.

$1+p+q+1=0$, $1+q+p+1=0$

$\therefore\ p+q=-2$

17. 두 실수 $x,\ y$ 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$

$x,\ y$ 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$\frac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$

$x^2+2x-3\leq 0,\ \ (x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

18. 두 점 A $(-3,\ 4)$, B $(2,\ 6)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점 Q의 좌표는?

① P$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
② P$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
③ P$\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$
④ P$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{7}{4}\right)$
⑤ P$\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{15}{2}\right)$

해설

P의 좌표를 P $(a,\ 0)$라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$\sqrt{(a+3)^2+(-4)^2} = \sqrt{(a-2)^2+(-6)^2}$

Q의 좌표를 Q $(0,\ b)$라 하면

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서

$\sqrt{3^2+(b-4)^2} = \sqrt{(-2)^2+(b-6)^2}$

두 식을 제곱하여 정리하면 $a = \frac{3}{2},\ b = \frac{15}{4}$

$\therefore$ P$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$

19. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-3)^2$으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+3$으로 나누면 4가 남는다고 한다. 이 때, $f(x)$를 $(x-3)^2(x+3)$으로 나눈 나머지는?

① $(x-3)^2$ ② $3x^2+2x-5$ ③ $\frac{1}{5}(x-3)^2$

④ x^2+2x-5 ⑤ $\frac{1}{9}(x-3)^2$

해설

$f(-3)=4$

$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c$

$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+a(x-3)^2$($\because$ $f(x)$는 $(x-3)^2$으로 나누어 떨어진다.

$f(x)=(x-3)^2\{(x+3)Q(x)+a\}$

$f(-3)=(-3-3)^2a=4$

$\therefore\ a=\frac{1}{9}$

$\therefore$구하는 나머지 : $\frac{1}{9}(x-3)^2$

20. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 A(0, 5)와 B(8, 1) 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \le a \le 8$)

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$

이 원이 두 점 A(0, 5), B(8, 1) 을 지나므로

$a^2 - 10b + 25 = 0,\ a^2 - 16a - 2b + 65 = 0$

두 식을 연립하면

$4a^2 - 80a + 300 = 0,\ 4(a-5)(a-15) = 0$

그런데

$0 \le a \le 8$ 이므로 $a = 5,\ b = 5$ 이다.

이 때, 직선 AB 의 방정식은

$$y - 5 = \frac{1-5}{8-0}(x-0)$$

$\therefore\ x + 2y - 10 = 0$

따라서 원의 중심 (5, 5) 와 직선 AB 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|5 + 2 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$