1. 두 다항식 x^3+1, x^3+2x^2-5x-6의 최대공약수를 구하면?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x-1$ ⑤ $x-2$

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$
$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)$
따라서 최대공약수는 $x+1$

2. $x = 1998,\ y = 4331$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ i　　⑤ $-i$

해설

$\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$

$= \dfrac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$

$= \dfrac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{(y-xi)(x+yi)} = 0$

3. 이차함수의 최댓값 또는 최솟값과 그 때의 x 의 값이 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $y = 2x^2 \rightarrow x = 0$ 일 때, 최솟값 0

② $y = -3x^2 + 4 \rightarrow x = 0$ 일 때, 최댓값 4

③ $y = -(x+3)^2 \rightarrow x = -3$ 일 때, 최댓값 0

④ $y = -(x+2)^2 - 1 \rightarrow x = -2$ 일 때, 최댓값 -1

⑤ $y = 2x^2 + 4x + 1 \rightarrow x = -1$ 일 때, 최솟값 1

해설

⑤ $y = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 1$

$y = 2(x+1)^2 - 1$

따라서 $x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖는다.

4. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$를 $x^2 + x + 1$로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3　② 3　③ -6　④ 6　⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.

$\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$이 되는 x값을 대입한다.

$x^2 + x + 1 = 0$에서 $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0,\ x^3 - 1 = 0$

$\therefore x^3 = 1$

준 식의 좌변에 $x^3 = 1,\ x^2 = -x - 1$을 대입하면

$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0,\ a - 3 = 0$

$\therefore\ a = 3$

5. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.
$a - b = 2004 - 2001 = 3$
$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

6. $f(x)$가 x의 다항식일 때 $(x^2-2)(x^4+1)f(x) = x^8+ax^4+b$가 x에 대한 항등식이 될 때 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

$(x^2-2)(x^4+1)f(x) = x^8+ax^4+b$에서

$x^2=2$를 대입하면 $0=16+4a+b\cdots$①

$x^4=-1$을 대입하면 $0=1-a+b\cdots$②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-4$

$\therefore\ a+b=-7$

7. $\frac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$\frac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0$, $a+k=0$, $-b+k=0$

$\therefore$ $k=2$, $a=-2$, $b=2$

$\therefore$ $a-b=-4$

8. 두 다항식 $f(x) = x^2+3x+a$, $g(x) = x^3+ax$를 $x+2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = -2$

해설

$f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$에서
$f(-2) = g(-2)$이므로
$4 - 6 + a = -8 - 2a$
$\therefore\ a = -2$

9. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$로 나누면 나머지는 -4이고, 그 몫을 $x+2$로 나누면 나머지는 2이다. 이때, $f(x)$를 $x+2$로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

10. $x^4+2x^3-2x^2+2x-3$을 바르게 인수분해 한 것을 찾으면?

① $(x^2+1)(x+3)(x+1)$
② $(x^2+1)(x+3)(x-1)$
③ $(x^2+1)(x-3)(x-1)$
④ $(x^2-3)(x-1)(x+1)$
⑤ $(x^2+3)(x-1)(x+1)$

해설

$f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$라 하면
$f(1)=0, f(3)=0$이므로
$f(x)$는 $x-1, x+3$로 나누어떨어진다.
$\therefore\ f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$
$=(x^2+1)(x+3)(x-1)$

11. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4+1)(x^2-1)}{(x^4+1)(x+1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

12. $z = \dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $z^{100} + \dfrac{1}{z^{100}}$ 의 값을 구하여라.($i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$z = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$

$z^{100} + \dfrac{1}{z^{100}} = (-i)^{100} + \dfrac{1}{(-i)^{100}} = 1 + 1 = 2$

13. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3+3i$

해설

$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$

$= \sqrt{3\cdot(-3)} - \sqrt{(-3)\cdot(-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}}$

$= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9}$

$= -\sqrt{9} + \sqrt{-9}$

$= -3+3i$

14. 이차방정식 $x^2+5(a-1)x-24a=0$의 두 근의 비가 $2\ :\ 3$일 때, 실수 a의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

두 근을 $\alpha=2k,\ \beta=3k$라고 하면
$\alpha+\beta=2k+3k=-5(a-1)$
$\alpha\beta=2k\times3k=-24a$
$\therefore k=1-a,\ k^2=-4a$
$a=1-k$를 대입하면
$k^2+4(1-k)=k^2-4k+4=(k-2)^2=0$
$\therefore k=2$
$\therefore a=-1$

해설

15. 이차방정식 $x^2+4x+a=0$ 의 한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 일 때, ab 의 값은?
(단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -10

해설
한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 이면 다른 한 근은 $b-\sqrt{2}i$ 이다.
근과 계수와의 관계를 이용하면
$2b=-4,\ b^2+2=a$
$\therefore\ \ a=6,\ b=-2,\ ab=-12$

16. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$ 의 그래프가 a 의 값에 관계없이 직선 $y = mx + n$ 과 접할 때, 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값은?

① -4　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$ 의 그래프가
직선 $y = mx + n$ 과 접하므로
$x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1 = mx + n$
즉, $x^2 - (2a + m)x + a^2 + 2a - n - 1 = 0$
$\therefore 4am + m^2 - 8a + 4n + 4 = 0$
이 식이 a 의 값에 관계없이 성립하므로
$(4m - 8)a + (m^2 + 4n + 4) = 0$
$4m - 8 = 0,\ m^2 + 4n + 4 = 0$ 에서
두 식을 연립하여 풀면 $m = 2, n = -2$
$\therefore m + n = 0$

17. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 가 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x = 2$ 에서 최솟값이 4 이므로
꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 4)$ 이다.
$y = (x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 8$
$a = 4,\ b = 8$
$\therefore a + b = 12$

18. 둘레의 길이가 24m 인 직사각형 중 그 넓이가 가장 넓을 때의 넓이를 구하면?

① $30\,\mathrm{cm}^2$ ② $32\,\mathrm{cm}^2$ ③ $34\,\mathrm{cm}^2$
④ $36\,\mathrm{cm}^2$ ⑤ $38\,\mathrm{cm}^2$

해설

가로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$, 세로의 길이를 $(24-x)\,\mathrm{m}$, 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36-26) \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

따라서 $x=6$ 일 때 넓이의 최댓값은 $36\,\mathrm{m}^2$ 이다.

19. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 모든 모서리의 길이의 합이 $20\,\mathrm{m}$이고 대각선의 길이가 $3\,\mathrm{m}$일 때, 이 상자의 겉넓이는 몇 m^2인가?

① $12\,\mathrm{m}^2$ ② $13\,\mathrm{m}^2$ ③ $14\,\mathrm{m}^2$ ④ $15\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $16\,\mathrm{m}^2$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c라 하면

$4(a+b+c)=20,\ a+b+c=5$

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3,\ a^2+b^2+c^2=9$

$$\begin{aligned}(\text{겉넓이}) &= 2(ab+bc+ca)\\ &= (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\\ &= 25-9=16(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

20. x에 관한 세 개의 다항식 $A(x)=x^4-10x^2+9$, $B(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$, $C(x)=x(x-3)(x^2+a)-(x-3)(x^2+b)+8$의 최대공약수가 이차식일 때, $a+b$의 값은?

① 4　② -4　③ 8　④ -8　⑤ 2

해설

$A(x)=x^4-10x^2+9=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$

$B(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$

$\quad=(x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$

$\therefore$두 다항식의 최대공약수는$(x-1)(x+1)(x-3)$

그런데 다항식 $C(x)$는 $x-3$으로 나누어떨어지지 않으므로

세 다항식의 최대공약수는$(x-1)(x+1)$이다.

$\therefore$ 다항식 $C(\pm1)=0$

$\therefore\ C(1)=-a+b+4=0,\ C(-1)=a+b+4=0$

$\therefore\ a=0,\ b=-4$에서 $a+b=-4$

21. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$라고 하면

$|\alpha+2-\alpha| = \dfrac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1} = |2|$

$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$4=p^2+8p+16-4q+8,\ 4q=p^2+8p+20$

$q=\dfrac{1}{4}p^2+2p+5=\dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$

$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$

양변을 제곱하면

$(p+4)^2-4(q-2)=4$

q에 대해 정리하면

$q=\dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

22. 길이가 80 m 인 끈으로 목장의 경계를 직사각형 모양으로 표시하려고 한다. 목장의 넓이를 최대로 하려면 이 울타리의 가로의 길이는 몇 m 로 정해야 하는가?

① 10 m　② 20 m　③ 30 m　④ 40 m　⑤ 50 m

해설

가로의 길이를 x m 라 하면 세로의 길이는 $(40 - x)$ m 이므로
목장의 넓이를 y m^2 라 하면
$y = x(40 - x) = -x^2 + 40x = -(x - 20)^2 + 400 \cdots\cdots$ ㉠
이 때, $0 < x < 40$ 이므로 ㉠은 $x = 20$ 일 때 최대이고 최댓값은 400 이다.
따라서, 목장의 넓이를 최대로 하려면 울타리의 가로의 길이는 20 m 로 해야 한다

23. x 에 대한 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에 대하여 $f(x)+2,\ xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha)+2=0, \alpha f(\alpha)+2=0$
$f(\alpha)=-2, \alpha=1$
$\therefore f(1)=-2$
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$
$f(1)=1+a+b+c=-2$
$\therefore a+b+c=-3$

24. 실수 $x,\ y,\ z$가 $x+y+z=6,\ xy+yz+zx=9$를 만족할 때 x의 최대값을 M, 최소값을 m이라 한다. 이 때 $M-m$의 값을 구하면 ?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y+z=6-x,$

$yz=9-x(y+z)=9-x(6-x)=(x-3)^2$

실수 y, z를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$t^2-(6-x)t+(x-3)^2=0$

$D=(6-x)^2-4(x-3)^2 \geq 0$에서 $x(x-4) \leq 0$

$\therefore\ 0 \leq x \leq 4$

$M=4,\ m=0 \quad \therefore\ M-m=4$

25. 지면으로부터 $20\,\mathrm{m}$ 높이의 옥상에서 초속 $20\,\mathrm{m}$ 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 $h\,\mathrm{m}$ 라 할 때, 관계식 $h = 20t - t^2 + 20$ 이 성립한다. 높이가 가장 높을 때는 던진 후 몇 초 후인가?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} h &= 20t - t^2 + 20 \\ &= -(t^2 - 20t) + 20 \\ &= -(t-10)^2 + 120 \end{aligned}$$

따라서 $t = 10$ 일 때 최댓값 120 를 가진다.