1. 실수 x에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1| + |x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$ ② $-2x+1$ ③ 3

④ -3 ⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0, \quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1-x+2 = 3$

2. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.

3. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.

4. x에 대한 삼차식 x^3+ax^2+bx+3이 x^2+1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=3$ ② $a=1,\ b=3$

③ $a=3,\ b=-1$ ④ $a=-3,\ b=-1$

⑤ $a=3,\ b=1$

해설

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+3 &= (x^2+1)(x+c) \\ &= x^3+cx^2+x+c \end{aligned}$$

$\therefore\ a=c,\ b=1,\ c=3$

$\therefore\ a=3,\ b=1$

5. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때 $f(x)$를 $\frac{g(x)}{n}$로 나눈 몫과 나머지를 나타낸 것은?

① 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $R(x)$
② 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $R(x)$
③ 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $\frac{R(x)}{n}$
④ 몫 : $Q(x)$, 나머지 $\frac{R(x)}{x}$
⑤ 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $nR(x)$

해설

$f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \cdots ㉠$

$f(x) = \frac{g(x)}{n}Q'(x) + R'(x) \cdots ㉡$

㉠ 에서 $f(x) = nQ(x)\frac{g(x)}{n} + R(x)$,

$\frac{Q'(x)}{n} = Q(x),\ R'(x) = R(x)$

$\therefore\ Q'(x) = n \cdot Q(x), R'(x) = R(x)$

6. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

① $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2$
$+(ab+bc+ca)x-abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

③ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2$
$+(ab+bc+ca)x+abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 대각선의 길이가 28 이므로
가로를 a, 세로를 b, 높이를 c 라고 했을 때
$(a^2+b^2)+c^2=28^2$
모든 모서리의 길이의 합이 176이므로
$a+b+c=44$
따라서 ③번과 같은 식을 사용하여 겉넓이를 구할 수 있다.

7. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3이 x^2+1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=3$
② $a=1,\ b=3$
③ $a=3,\ b=-1$
④ $a=-3,\ b=-1$
⑤ $a=3,\ b=1$

해설

x^3+ax^2+bx+3
$=(x^2+1)(x+c)$
$=x^3+cx^2+x+c$
$\therefore\ a=c,\ b=1,\ c=3$
따라서 $a=3,\ b=1$

8. x^3-4x^2+ax+b를 $(x+1)^2$으로 나누면 나머지가 7이 될 때, $a+b$의 값은?

① -12 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 12

해설

직접 나눠본다.

$$
\begin{array}{rl}
 & x-6 \\ \cline{2-2}
x^2+2x+1\,\big) & x^3-4x^2+\qquad ax+b \\
- & x^3+2x^2+\qquad x \\ \cline{2-2}
 & -6x^2+(a-1)x+b \\
- & -6x^2-\qquad 12x-6 \\ \cline{2-2}
 & (a+11)x+b+6
\end{array}
$$

나머지가 7이므로 $a+11=0,\ b+6=7$

$\therefore\ a=-11,\ b=1$

$\therefore\ a+b=-10$

해설

x^3-4x^2+ax+b

$=(x+1)^2(x+k)+7$

$=x^3+(k+2)x^2+(2k+1)x+k+7$

계수를 비교하면

$k+2=-4, 2k+1=a, k+7=b$

$k=-6$이므로 $a=-11, b=1$

$\therefore a+b=-10$

9. 등식 $x^3+ax^2+2x+b=(x^2+x+1)Q(x)+2x+1$이 x에 대한 항등식일 때, $a+b$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$Q(x)=x+c$라고 두고 전개하여 계수를 비교하면
$a=0,\ b=0,\ c=-1$이므로 $a+b=0$

해설

x^3+ax^2+2x+b를 x^2+x+1로 직접 나눗셈을 하면,

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+(a-1) \\ \hline
x^2+x+1 & x^3+ax^2+\quad 2x+b \\
- & x^3+\ x^2+\quad x \\ \hline
 & (a-1)x^2+\quad x+b \\
- & (a-1)x^2+(a-1)x+(a-1) \\ \hline
 & (2-a)x+b-a+1
\end{array}
$$

$2-a=2,\ b-a+1=1$

$a=0,\ b=0$

10. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 합은 2이다.

② 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 차는 4이다.

③ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 곱은 5이다.

④ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은 -6이다.

해설

$ax^2+bx+c=0$에서

두근의 합 : $-\dfrac{b}{a}$

두근의 곱 : $\dfrac{c}{a}$

두근의 차 : $\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

$\therefore$ ② (두근의 차)$=4i$

11. 이차방정식 $\sqrt{3}x^2-(\sqrt{3}+3)x+3=0$의 두 근을 a, b라 할 때, $a\times b$의 값은?

① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$3x^2-(3+3\sqrt{3})x+3\sqrt{3}=0$

$x^2-(1+3)x+\sqrt{3}=0$

$(x-1)(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$\therefore a\times b=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$

12. 이차방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2+x-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근의 곱은?

① $-\sqrt{2}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=0$

$x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$

$(x+\sqrt{2})(x-1)$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=1$

따라서 두 근의 곱은 $-\sqrt{2}$

13. $\alpha = 1 - i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha}^2 + \alpha^2\overline{\alpha}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $-2i$ ② 2 ③ $2i$

④ 4 ⑤ $2+3i$

해설

$\alpha = 1 - i$, $\overline{\alpha} = 1 + i$

$\alpha + \overline{\alpha} = 2, \alpha\overline{\alpha} = 2$

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}^2 + \alpha^2\overline{\alpha} &= \alpha\overline{\alpha}(\alpha + \overline{\alpha})\\ &= 2 \cdot 2\\ &= 4\end{aligned}$$

14. 복소수 $\alpha = 2 - i$, $\beta = -1 + 2i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}
&\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta} \\
&= \overline{\alpha}(\alpha + \beta) + \overline{\beta}(\alpha + \beta) \\
&= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) \\
&= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) \\
&= (1 + i)(1 - i) \\
&= 2
\end{aligned}$$

15. 복소수 $w=2-i$ 에 대하여 $\dfrac{w}{w+1}+\dfrac{\overline{w}}{\overline{w}+1}$ 의 값은? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① $\dfrac{3}{5}$ ② $\dfrac{7}{5}$ ③ 1 ④ $\dfrac{7}{10}$ ⑤ $\dfrac{9}{10}$

해설

$\overline{w}=2+i$

$$\frac{w}{w+1}+\frac{\overline{w}}{\overline{w}+1}$$
$$=\frac{2-i}{3-i}+\frac{2+i}{3+i}$$
$$=\frac{(2-i)(3+i)+(2+i)(3-i)}{(3-i)(3+i)}$$
$$=\frac{14}{10}$$
$$=\frac{7}{5}$$

해설

$\omega+\overline{\omega}=4, \omega\overline{\omega}=5$

$$\frac{w}{w+1}+\frac{\overline{w}}{\overline{w}+1}=\frac{2\omega\overline{\omega}+\omega+\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}+\omega+\overline{\omega}+1}$$
$$=\frac{10+4}{5+4+1}$$
$$=\frac{7}{5}$$

16. 두 복소수 α, β 에 대하여 $\alpha+\overline{\beta}=2008i$ 일 때, $\overline{\alpha}+\beta$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① 2008　　② -2008

③ $2008i$　　④ $-2008i$

⑤ 일정하지 않다.

해설

켤레복소수의 성질에서

$\alpha+\overline{\beta}=2008i$ 일 때

$\overline{\alpha+\overline{\beta}}=\overline{2008i}$

$\overline{\alpha}+\beta=-2008i$

17. $\overline{z-zi}=1-i$ 를 성립시키는 복소수 z 은?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $-i$ ② 0 ③ i

④ $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$ ⑤ $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

해설

$$\begin{aligned}\overline{z-zi} &= \overline{z(1-i)}\\ &= \bar{z}\cdot\overline{1-i}\\ &= \bar{z}(1+i)\\ \bar{z}(1+i) &= (1-i)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \bar{z}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$$

$$\therefore\ z=i$$

18. 임의의 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z=x+yi$ 와 결레복소수 $\bar{z}=x-yi$ 의 곱 $z\bar{z}=1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 을 간단히 하면?

① $-y$ ② $-x$ ③ x ④ y ⑤ 0

해설

$z\bar{z}=1$ 에서 $\frac{1}{z}=\bar{z}=x-yi$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)&=\frac{1}{2}\{(x+yi)+(x-yi)\}\\&=\frac{1}{2}\times 2x\\&=x\end{aligned}$$

19. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(m-2)x + 2m - 1 = 0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m > 5$　　② $m \geq 5$　　③ $m < 5$

④ $m \leq 5$　　⑤ $-5 \leq x \leq 5$

해설

주어진 이차방정식이 두 실근을 가져야 하므로

$D/4 = (m-2)^2 - 2m + 1 \geq 0$

즉 $m^2 - 4m + 4 - 2m + 1 = m^2 - 6m + 5 \geq 0$

따라서 $(m-5)(m-1) \geq 0$이므로

$m \leq 1$ 또는 $m \geq 5$

또 두근의 합 $-2(m-2) < 0$이어야 하므로 $m > 2$

또 두근의 곱 $2m - 1 > 0$이어야 하므로 $m > \dfrac{1}{2}$

따라서 $m \geq 5$

20. 이차방정식 $(2-k)x^2+2kx+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 범위를 구하면?

① $k \le 2$　② $k > -2$　③ $k \le -2$

④ $0 < k \le 2$　⑤ $k > 2$

해설

서로 다른 부호의 실근을 가지려면 두 근의 곱인 $\frac{1}{2-k} < 0$을 만족시키면 된다.

따라서 $k > 2$

21. x의 이차방정식 $x^2+(a^2-a-12)x-a+3=0$ (a는 실수)의 두 실근은 절대값이 같고 부호가 반대라 한다. 다음 중 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

두 근을 α, β라 할 때,

$\alpha+\beta=-(a^2-a-12)=0$, $\alpha\beta=-a+3<0$

$\therefore\ a=4$