1. 다음 중 $x^4 - x^2$의 인수가 아닌 것은?

① x ② $x-1$ ③ $x+1$
④ $x^3 - x$ ⑤ x^4

해설

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 &= x\left(x^3 - x\right) \\ &= x^2\left(x^2 - 1\right) \\ &= x^2(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

2. $a^2b + b^2c - b^3 - a^2c$을 인수분해하면?

① $(a+b)(a-b)(b+c)$ ② $(a-b)(b-c)(c+a)$

③ $(a-b)(a+b)(b-c)$ ④ $(a-b)(a+b)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b+c)(c-a)$

해설

$a^2b + b^2c - b^3 - a^2c$
$= a^2(b-c) - b^2(b-c)$
$= (a-b)(a+b)(b-c)$

3. 다항식 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ 을 인수분해하면?

① $(x-1)^2(x+1)$ ② $(x+1)^2(x-1)$
③ $(x-1)(x+1)$ ④ $(x-1)^3$
⑤ $(x+1)^3$

해설

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= x^2(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1)(x^2-1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

$\therefore\ f(x) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$

해설

인수정리를 이용하여 인수분해할 수 있다.
$f(1) = 0$,
즉 $x-1$ 로 나누어 떨어지므로
조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

4. 다음 중 $a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c$ 의 인수인 것은?

① $a - b + c$ ② $c - a$ ③ $b + c$
④ $a - b$ ⑤ $c - b + a$

해설

$$\begin{aligned} a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c &= a^3 - ab^2 + a^2c - b^2c \\ &= a(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)c \\ &= (a - b)(a + b)(a + c) \end{aligned}$$

5. $x^2+y^2+2xy-x-y$을 인수분해 하면?

① $(x-y)(x+y+1)$
② $(x+y)(x-y-1)$
③ $(x-y)(x-y-1)$
④ $(x+y)(x+y-1)$
⑤ $(x+y)(x+y+1)$

해설

$x^2+y^2+2xy-x-y$

$=(x+y)^2-(x+y)=(x+y)(x+y-1)$

6. $\frac{k}{3}(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$ 와 같은 것은?

① $\frac{1}{6}(k+1)(k+3)(k+4)$　② $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

③ $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$　④ $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)(k+3)$

⑤ $\frac{1}{4}(k+1)(2k+1)(3k+2)$

해설

$(k+1)(k+2)=\frac{3}{3}(k+1)(k+2)$ 이므로

공통인수 $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)$ 로 묶으면

(준 식)$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

7. $x^4 - 6x^2 + 8$를 인수분해하면? (단, 유리수 범위에서 인수분해 하여라.)

① $(x^2-2)(x^2-4)$

② $(x^2-2)(x-4)(x+4)$

③ $(x^2-2)(x-2)(x+2)$

④ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

⑤ $(x^2-\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^2 + 8 &= (x^2)^2 - 6x^2 + 8 \\ &= (x^2-2)(x^2-4) \\ &= (x+2)(x-2)(x^2-2) \end{aligned}$$

해설

인수정리를 이용할 수 있다.

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

$f(2) = 0,\ \ f(-2) = 0,$

즉, $(x-2)(x+2)$로 나누어 떨어지므로

조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

8. $a^2b^3c^4$, $ab^2c^4e^3$ 의 최대공약수를 구하면?

① ab^2c^3　② ab^2c^4　③ ab^3c^4

④ $a^2b^3c^4$　⑤ $ab^2c^4e^3$

해설

두 식의 공통인수 중 낮은 차수를 선택하여 곱한다.
$a^2b^3c^4$, $ab^2c^4e^3$ 에서
공통인수는 a, b, c 이고
차수가 낮은 것은 각각 a, b^2, c^4 이다.
이들을 모두 곱하면 최대공약수는 ab^2c^4

9. 두 다항식 $3x^4-2x^3-9x^2+4$, $3x^3-3x^2-6x$의 최대공약수를 구하면?

① $(x-1)(x-2)$ ② $(x+1)(x+2)$ ③ $(x+1)(x-2)$
④ $(x-1)(x-2)$ ⑤ $(x+1)(x-1)$

해설

$3x^4-2x^3-9x^2+4$
$=(x+1)(x-2)(x+1)(3x-2)$
$3x^3-3x^2-6x=3x(x-2)(x+1)$
$\therefore$ 최대공약수 : $(x-2)(x+1)$

10. 두 다항식 x^3+1, x^3+2x^2-5x-6의 최대공약수를 구하면?

① x　② $x+1$　③ $x+2$　④ $x-1$　⑤ $x-2$

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$
$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)$
따라서 최대공약수는 $x+1$

11. $x^2 + ax + b = 0$ (a, b 는 실수) 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1 + i$ 이므로,
켤레근 $1 - i$ 도 식의 근.
$(1 + i) + (1 - i) = -a$
$\therefore\ a = -2$

12. 다항식 $2x^3 + ax^2 + x + b$가 $x^2 - x + 1$로 나누어떨어질 때, $a - b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$2x^3 + ax^2 + x + b$
$= (x^2 - x + 1)(2x + c)$
$= 2x^3 + (c - 2)x^2 + (2 - c)x + c$
$\therefore\ a = c - 2,\ 1 = 2 - c,\ b = c$
$c = 1$이므로 $a = -1, b = 1$
$\therefore\ a - b = -2$

13. 등식 $x^3+ax^2+2x+b=(x^2+x+1)Q(x)+2x+1$이 x에 대한 항등식일 때, $a+b$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$Q(x)=x+c$라고 두고 전개하여 계수를 비교하면
$a=0,\ b=0,\ c=-1$이므로 $a+b=0$

해설

x^3+ax^2+2x+b를 x^2+x+1로 직접 나눗셈을 하면,

$$
\begin{array}{r l}
 & x+(a-1) \\ \cline{2-2}
x^2+x+1 \big) & x^3+ax^2+\qquad 2x+b \\
- & x^3+\ \ x^2+\qquad\ \ x \\ \cline{2-2}
 & (a-1)x^2+\qquad x+b \\
- & (a-1)x^2+(a-1)x+(a-1) \\ \cline{2-2}
 & \qquad (2-a)x+b-a+1
\end{array}
$$

$2-a=2,\ b-a+1=1$
$a=0,\ b=0$

14. 다항식 $4x^3 - 2x^2 - 21x + \frac{45}{2}$ 가 $(x-r)^2$ 으로 나누어 떨어질 때, 양수 r 의 값은?

① 1.2　② 1.5　③ 1.8　④ 2.1　⑤ 2.4

해설

$f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 21x + \frac{45}{2} \cdots$ ①

$f(x) = (x-r)^2(4x-\alpha)$

$= (x^2 - 2rx + r^2)(4x - \alpha)$

$= 4x^3 - (\alpha + 8r)x^2 + (4r^2 + 2r\alpha)x - r^2\alpha$

①과 계수비교를 하면

$\alpha + 8r = 2 \cdots$ ㉠, $4r^2 + 2r\alpha = -21 \cdots$ ㉡

㉠에서 $\alpha = 2 - 8r$,

㉡에 대입하면

$4r^2 + 2r(2 - 8r) = -21$

$12r^2 - 4r - 21 = 0$, $(2r-3)(6r+7) = 0$

$\therefore\ r = \frac{3}{2}\ \ (\because\ r > 0)$

15. 다항식 x^3+ax-8 을 x^2+4x+b로 나눈 나머지가 $3x+4$이다. 상수 a, b의 값을 구하면?

① $a=-10,\ b=3$
② $a=10,\ b=3$
③ $a=-10,\ b=-3$
④ $a=7,\ b=3$
⑤ $a=-5,\ b=4$

해설

몫을 $x+c$라고 둔다면
$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+c)+3x+4$
이차항의 계수 : $c+4=0$에서 $c=-4$
상수항 : $bc+4=-8$에서 $b=3$
일차항의 계수 : $4c+b+3=a$에서 $a=-10$

16. 다항식 $x^3 - 4x^2 + ax + b$가 $x^2 + 2$로 나누어 떨어질 때, $3a + b$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + ax + b$

$= (x^2 + 2)(x - \alpha)$ 라 놓을 수 있다.

$x^3 - \alpha x^2 + 2x - 2\alpha = x^3 - 4x^2 + ax + b$

$\therefore\ \alpha = 4,\quad a = 2,\quad b = -8$

$\therefore\ 3a + b = -2$

17. 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지가 상수일 때, $f(x)$의 일차항의 계수는?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ -2

해설

$f(x)=(x^2-1)(x+a)+r$ (a, r는 상수)라 하면
$f(x)=x^3+ax^2-x-a+r$
$\therefore$ 일차항의 계수는 -1

18. $3x^3 - 5x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a+b+c+d$ 의 값은?

① -16　　② 16　　③ 20　　④ 23　　⑤ 25

해설

$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d = (x-1)\{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} + d$
$= (x-1)\,(x-1)[a(x-1) + b] + c\} + d$ 이므로
조립제법을 쓰면

1	3	0	−5	2		
		3	3	−2		
1	3	3	−2	0	←	d
		3	6			
1	3	6	4	←	c	
		3				
	3	9	← b			
	↑					
	a					

$a + b + c + d = 3 + 9 + 4 + 0 = 16$

해설

이 문제의 경우 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x = 2$ 를 대입해서 한꺼번에 구하는 값을 얻을 수 있다.

19. 임의의 실수 x에 대하여 $2x^3-5x+2 = a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 성립할 때, $a^2-b^2+c^2-d^2$ 의 값을 구하면?

① 56 ② 28 ③ −28 ④ −46 ⑤ −56

해설

a, b, c, d 는 $2x^2-5x+2$ 를 $(x+1)$ 로 계속 나눠 줄때 나오는 나머지이다.
조립제법을 이용해 보면

−1	2	0	−5	2		
		−2	2	3		
−1	2	−2	−3	5	←	d
		−2	4			
−1	2	−4	1	←	c	
		−2				
−1	2	−6	← b			
	↑					
	a					

$\therefore a^2-b^2+c^2-d^2 = 2^2-(-6)^2+1^2-5^2 = -56$

20. 등식 $3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3　② -4　③ 2　④ 8　⑤ 6

해설

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$
$=(x-1)\{a(x-1)+b\}+c$

$$
\begin{array}{c|cccll}
1 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & & 3 & 5 & & \\
\hline
1 & 3 & 5 & \boxed{6} & \leftarrow & \mathrm{c} \\
 & & 3 & & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{8} & \leftarrow \mathrm{c} & & \\
 & \uparrow & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & &
\end{array}
$$

해설

$x=1$ 을 대입하면 $c=6$
$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+6$
$\rightarrow 3x^2+2x-5=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow (x-1)(3x+5)=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow$ 양변을 $x-1$ 로 나누면
$3x+5=a(x-1)+b=ax-a+b$
$\therefore\ a=3,\ b=8$
※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

21. x 에 관한 항등식 $x^3+2x^2-3x+5=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 를 만족시키는 $a,\ b,\ c,\ d$ 에 대하여 $abcd$ 의 값은?

① -10 ② 10 ③ 50 ④ 100 ⑤ 200

해설

$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$
$=(x-1)\{a(x-1)^2+b(x-1)+c\}+d$
$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$
따라서 x^3+2x^2-3x+5 를 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 $d,\ c,\ b$ 가 되고 마지막의 몫이 a 이다.

$a=1,\ b=5,\ c=4,\ d=5$
$\therefore\ abcd=100$

22. 등식 $3x^3 - x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 값을 정하면?

① $a = 3\ b = 7$, $c = -4$, $d = 4$

② $a = 3\ b = 9$, $c = 8$, $d = 4$

③ $a = 2\ b = 9$, $c = 6$, $d = 4$

④ $a = 1\ b = 3$, $c = 8$, $d = 4$

⑤ $a = 2\ b = -9$, $c = 6$, $d = 4$

해설

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 3 & 0 & -1 & 2 & & \\
 & & 3 & 3 & 2 & & \\
\hline
1 & 3 & 3 & 2 & \boxed{4} & \leftarrow & \mathrm{d} \\
 & & 3 & 6 & & & \\
\hline
1 & 3 & 6 & \boxed{8} & \leftarrow & \mathrm{c} & \\
 & & 3 & & & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{9} & \leftarrow \mathrm{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

해설

(i) $x - 1 = y$ 로 놓으면 $x = y + 1$ 이므로

$3(y+1)^3 - (y+1) + 2 = ay^3 + by^2 + cy + d$

$\therefore\ 3y^3 + 9y^2 + 8y + 4 = ay^3 + by^2 + cy + d$

$\therefore\ a = 3$, $b = 9$, $c = 8$, $d = 4$

(ii) x 대신 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 를 대입하면,

$x = 0$ 대입 : $2 = -a + b - c + d \cdots$ ①

$x = -1$ 대입 : $0 = -8a + 4b - 2c + d \cdots$ ②

$x = 1$ 대입 : $4 = d\ \ \cdots\cdots$ ③

$x = 2$ 대입 : $24 = a + b + c + d \cdots$ ④

①, ②, ③, ④를 연립하여 풀면,

$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

23. $2x^3+9x^2+11x+7=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 x에 대한 항등식일 때, $a,\ b,\ c, d$를 차례로 구하면?

① 3, -1, 3, 2
② 2, 3, -1, 3
③ -3, 1, -3, -2
④ -2, -3, 1, -3
⑤ 1, -3, 4, -2

해설

조립제법을 이용하면

$$
\begin{array}{r|rrrrll}
-1 & 2 & 9 & 11 & 7 & & \\
 & & -2 & -7 & -4 & & \\
\hline
-1 & 2 & 7 & 4 & \boxed{3} & \leftarrow & \mathrm{d} \\
 & & -2 & -5 & & & \\
\hline
-1 & 2 & 5 & \boxed{-1} & \leftarrow & \mathrm{c} & \\
 & & -2 & & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{3} & \leftarrow \mathrm{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & & &
\end{array}
$$

$a=2,\ b=3,\ c=-1,\ d=3$

24. 이차방정식 $x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 갖게 하는 실수 k의 값으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 가지므로
$D=(-3)^2+4\cdot 1\cdot (k-1)\geq 0$
$9+4k-4\geq 0,\ 4k\geq -5$
$\therefore\ k\geq -\frac{5}{4}$

25. x에 대한 이차방정식 $x^2-6x+2k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-2$ ② $-1<k<0$ ③ $-1<k<4$
④ $k<5$ ⑤ $0<k<5$

해설
$x^2-6x+2k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면
$\frac{D}{4}=9-2k+1>0$ $\therefore 2k<10$ $\therefore k<5$

26. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 할 때 $|\alpha-\beta|$는 다음 중 어느 것과 같은가 ?

① $\dfrac{\sqrt{D}}{a}$　　② $\dfrac{-\sqrt{D}}{a}$　　③ $\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$

④ $-\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$　　⑤ $-\dfrac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

즉 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ (단, $D=b^2-4ac$)

$$\begin{aligned}\therefore |\alpha-\beta| &= \left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right| \\ &= \left|\frac{-b+\sqrt{D}+b+\sqrt{D}}{2a}\right| \\ &= \left|\frac{2\sqrt{D}}{2a}\right| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}\end{aligned}$$