1. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}$를 계산하면?

① $\sqrt{15}$　② $-\sqrt{15}$　③ $\sqrt{15}i$
④ $-\sqrt{15}i$　⑤ -15

해설

$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i=-\sqrt{15}$

2. 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$이 중근을 가질 때, 실수 k의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 36

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \cdot k = 0$

$\therefore\ k = 9$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(m+a-1)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 중근을 갖는다. $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{3}$

해설

중근을 가지므로, $\frac{D'}{4}=0$을 만족한다.

$\frac{D'}{4}=(m+a-1)^2-(m^2+a^2-2b)=0$

$m(2a-2)+(1-2a+2b)=0$

m에 대한 항등식이므로

$2a-2=0,\ 1-2a+2b=0$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}$

4. 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + m + 4 = 0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 m의 값의 합을 구하면?

① -3 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D = 0$
$D = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+4) = m^2 - 2m - 15 = 0$
$(m-5)(m+3) = 0 \quad \therefore \ m = -3, \ 5$
$\therefore \ m$의 값의 합은 $-3 + 5 = 2$

5. x^3-4x^2+5x-3 을 $A(x-3)^3+B(x-3)^2+C(x-3)+D$ 로 나타낼 때, $ABCD$ 의 값을 구하면?

① -20 ② 40 ③ -60 ④ 120 ⑤ -120

해설

x^3-4x^2+5x-3 을 $x-3$ 에 대해 내림차순으로 정리하기 위해 $x-3$ 으로 반복하여 나누면 나머지가 차례로 $D,\ C,\ B,\ A$ 가 되므로

$$\begin{array}{c|cccccc}
3 & 1 & -4 & 5 & -3 & & \\
 & & 3 & -3 & 6 & & \\
\hline
3 & 1 & -1 & 2 & \boxed{3} & \leftarrow & \mathrm{d} \\
 & & 3 & 6 & & & \\
\hline
3 & 1 & 2 & \boxed{8} & \leftarrow & \mathrm{c} & \\
 & & 3 & & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{5} & \leftarrow \mathrm{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & & &
\end{array}$$

$\therefore\ ABCD=1\times5\times8\times3=120$

6. 등식 $3x^3 - x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 값을 정하면?

① $a = 3\ b = 7$, $c = -4$, $d = 4$

② $a = 3\ b = 9$, $c = 8$, $d = 4$

③ $a = 2\ b = 9$, $c = 6$, $d = 4$

④ $a = 1\ b = 3$, $c = 8$, $d = 4$

⑤ $a = 2\ b = -9$, $c = 6$, $d = 4$

해설

1	3	0	−1	2	
		3	3	2	
1	3	3	2	4	← d
		3	6		
1	3	6	8 ← c		
		3			
	3	9 ← b			
	↑ a				

$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

해설

(i) $x - 1 = y$ 로 놓으면 $x = y + 1$ 이므로

$3(y+1)^3 - (y+1) + 2 = ay^3 + by^2 + cy + d$

$\therefore\ 3y^3 + 9y^2 + 8y + 4 = ay^3 + by^2 + cy + d$

$\therefore\ a = 3$, $b = 9$, $c = 8$, $d = 4$

(ii) x 대신 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 를 대입하면,

$x = 0$ 대입 : $2 = -a + b - c + d \cdots$①

$x = -1$ 대입 : $0 = -8a + 4b - 2c + d \cdots$②

$x = 1$ 대입 : $4 = d\ \ \cdots\cdots$③

$x = 2$ 대입 : $24 = a + b + c + d \cdots$④

①, ②, ③, ④를 연립하여 풀면,

$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

7. $2x^3+9x^2+11x+7=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 x에 대한 항등식일 때, $a,\ b,\ c, d$를 차례로 구하면?

① 3, -1, 3, 2 ② 2, 3, -1, 3
③ -3, 1, -3, -2 ④ -2, -3, 1, -3
⑤ 1, -3, 4, -2

해설

조립제법을 이용하면

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
-1 & 2 & 9 & 11 & 7 & \\
 & & -2 & -7 & -4 & \\
\hline
-1 & 2 & 7 & 4 & \boxed{3} & \leftarrow \ \mathrm{d} \\
 & & -2 & -5 & & \\
\hline
-1 & 2 & 5 & \boxed{-1} & \leftarrow & \mathrm{c} \\
 & & -2 & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{3} & \leftarrow \mathrm{b} & & \\
 & \uparrow & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & &
\end{array}
$$

$a=2,\ b=3,\ c=-1,\ d=3$

8. 임의의 실수 x에 대하여 $2x^3-5x+2 = a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 성립할 때, $a^2-b^2+c^2-d^2$ 의 값을 구하면?

① 56　② 28　③ −28　④ −46　⑤ −56

해설

a, b, c, d 는 $2x^2-5x+2$ 를 $(x+1)$ 로 계속 나눠 줄때 나오는 나머지이다.
조립제법을 이용해 보면

$$
\begin{array}{r|rrrrll}
-1 & 2 & 0 & -5 & 2 & & \\
 & & -2 & 2 & 3 & & \\
\hline
-1 & 2 & -2 & -3 & \boxed{5} & \leftarrow & \text{d} \\
 & & -2 & 4 & & & \\
\hline
-1 & 2 & -4 & \boxed{1} & \leftarrow & \text{c} & \\
 & & -2 & & & & \\
\hline
-1 & 2 & \boxed{-6} & \leftarrow \text{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \text{a} & & & & &
\end{array}
$$

$\therefore a^2-b^2+c^2-d^2 = 2^2-(-6)^2+1^2-5^2 = -56$

9. x 에 관한 항등식$x^3+2x^2-3x+5=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 를 만족시키는 $a,\ b,\ c,\ d$ 에 대하여 $abcd$ 의 값은?

① -10　② 10　③ 50　④ 100　⑤ 200

해설

$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

$=(x-1)\{a(x-1)^2+b(x-1)+c\}+d$

$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$

따라서 x^3+2x^2-3x+5 를 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 $d,\ c,\ b$ 가 되고 마지막의 몫이 a 이다.

$a=1,\ b=5,\ c=4,\ d=5$

$\therefore\ abcd=100$

10. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5　　② -2　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,
양변에 x 를 곱하면
$x^2+1=tx$
$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로
$D=t^2-4\geq 0$　$\therefore t^2\geq 4$, $t\leq -2$ 또는 $t\geq 2$

11. 이차방정식 $x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 갖게 하는 실수 k의 값으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 가지므로

$D=(-3)^2+4\cdot1\cdot(k-1)\geq0$

$9+4k-4\geq0,\ 4k\geq-5$

$\therefore\ k\geq-\frac{5}{4}$

12. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖은 것의 개수는?

㉠ $3x^2 - x - 1 = 0$	㉡ $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$
㉢ $2x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$	㉣ $x^2 - x + 2 = 0$

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

㉠ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3(-1) = 13 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉡ $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$ 이므로 중근을 갖는다.

㉢ $D = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -13 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉣ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

13. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-1)x+\frac{1}{4}a^2+a-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 조건을 구하면?

① $a>1$　② $a<\frac{3}{2}$　③ $a<\frac{3}{4}$　④ $a>\frac{3}{4}$　⑤ $a<2$

해설

판별식을 D라고 하면,

$D=(a-1)^2-4\left(\frac{1}{4}a^2+a-2\right)=-6a+9$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$-6a+9>0$에서 $a<\frac{3}{2}$

14. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+a^2+7=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$ ② $-1 < a < 0$ ③ $-2 < a < 0$
④ $a \geq -\dfrac{1}{3}$ ⑤ $0 \leq a \leq \dfrac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\dfrac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(a+3)^2-(a^2+7) \geq 0$

$a^2+6a+9-a^2-7 \geq 0$

$6a+2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\dfrac{1}{3}$

15. 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a<1$ ② $a\ge 1$ ③ $-1<a<1$

④ $a>1$ ⑤ $a\ge -1$

해설

$x^2+2x+2-a=0$ 이

서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는

판별식 $D>0$ 이어야 한다.

$\frac{D}{4}=1-(2-a)>0$

$1-2+a>0$

$\therefore\ a>1$

16. 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$D' = 1^2-(k-3)>0$

$\therefore\ k<4$

$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because\ k$는 정수)

17. 이차방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2+x-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근의 곱은?

① $-\sqrt{2}$　② -1　③ 0　④ 1　⑤ $\sqrt{2}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=0$

$x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$

$(x+\sqrt{2})(x-1)$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=1$

따라서 두 근의 곱은 $-\sqrt{2}$

18. 이차방정식 $ix^2+(2+i)x-i(1+i)=0$ 의 두 근의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-1-2i$　　② $1-i$　　③ $-1+i$

④ $-1+2i$　　⑤ $3i$

해설

주어진 양 방정식에 i 를 곱하면

$-x^2+(2i-1)x-i(i-1)=0$

$x^2-(2i-1)x+i(i-1)=0$

$(x-i)(x+1-i)=0$

$\therefore x=i$ 또는 $x=-1+i$

두 근의 합은 $-1+2i$

19. 이차방정식 $f(x)=0$의 두근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=6$이 성립한다. 이 때, 방정식 $f(5x-7)=0$의 두 근의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0(a\neq 0)$에서

$f(5x-7)=a(5x-7-\alpha)(5x-7-\beta)=0$

$\therefore\ 5x=7+\alpha,\ 7+\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{7+\alpha}{5},\ \dfrac{7+\beta}{5}$

따라서, 구하는 두 근의 합은

$\dfrac{14+\alpha+\beta}{5}=\dfrac{20}{5}=4$

20. 임의의 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 의 곱 $z\bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 을 간단히 하면?

① $-y$ ② $-x$ ③ x ④ y ⑤ 0

해설

$z\bar{z} = 1$ 에서 $\frac{1}{z} = \bar{z} = x - yi$

$$\begin{aligned} \therefore\ \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2}\{(x + yi) + (x - yi)\} \\ &= \frac{1}{2} \times 2x \\ &= x \end{aligned}$$

21. $\alpha = 1+i$ 일 때, $\overline{\left(\frac{1-\alpha}{a\bar{a}+1}\right)}$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

① $\frac{i}{3}$　② i　③ $-i$　④ $1+i$　⑤ $1-i$

해설

$\alpha = 1+i$, $\overline{\alpha} = 1-i$ 를 대입하면

$$\overline{\left(\frac{1-\alpha}{a\bar{a}+1}\right)} = \overline{\left\{\frac{1-(1+i)}{(1+i)(1-i)+1}\right\}} = \overline{\left(\frac{-i}{3}\right)} = \frac{i}{3}$$

22. $\alpha = 1 - i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha}^2 + \alpha^2\overline{\alpha}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $-2i$　　② 2　　③ $2i$
④ 4　　⑤ $2+3i$

해설

$\alpha = 1 - i$, $\overline{\alpha} = 1 + i$

$\alpha + \overline{\alpha} = 2, \alpha\overline{\alpha} = 2$

$$\begin{aligned} \alpha\overline{\alpha}^2 + \alpha^2\overline{\alpha} &= \alpha\overline{\alpha}(\alpha + \overline{\alpha}) \\ &= 2 \cdot 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

23. 다음 x의 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 다르게 실수 m의 값을 정하면?

$$3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=18-m^2$$

① -4　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은
$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta<0$
준식을 x에 관해서 정리하면,
$3x^2+(m^2-3m-10)x+m^2+3m-18=0$
따라서, $\alpha+\beta=\dfrac{-(m^2-3m-10)}{3}=0,$
즉 $m^2-3m-10=0$
$(m-5)(m+2)=0\quad\therefore\ m=5,\ -2\quad\cdots\cdots$ ㉠
$\alpha\beta=\dfrac{m^2+3m-18}{3}<0,\ m^2+3m-18<0$
$(m-3)(m+6)<0\quad\therefore\ -6<m<3\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통범위에 의해 $m=-2$

24. $a > 0$일 때, $x^2 + ax + b = 0$의 근이 모두 음수인 경우 실수 b의 값의 범위는?

① $b < 0$　　② $\frac{-a^2}{4} \le b < 0$　　③ $0 < b \le \frac{a^2}{4}$

④ $b > 0$　　⑤ $0 < b < a$

해설

$D = a^2 - 4b \ge 0$

$\therefore b \le \frac{a^2}{4}$

(두 근의 곱) $= \ b > 0$

$\therefore 0 < b \le \frac{a^2}{4}$

25. x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+2k+3=0$에 두 근이 모두 음수가 되게 하는 실수 k의 값의 범위를 정하면 ?

① $k \geq 3$　② $-\frac{3}{2} < k \leq -1$　③ $k < -\frac{3}{2}$
④ $\frac{3}{2} < k \leq 2$　⑤ $k < \frac{3}{2}$

해설

두 근이 모두 음수이면
① $D/4 \geq 0$에서 $k \leq -1, k \geq 3$
② 두 근의 합 $2k < 0,\ \ k < 0$
③ 두 근의 곱 $k > -\frac{3}{2}$
따라서 $-\frac{3}{2} < k \leq -1$

26. a, b, c는 실수이고, $a > 0, ac - b^2 > 0, b \neq 0$이라 할 때, x의 이차방정식 $x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 서로 다른 두 개의 음의 근
② 서로 다른 두 개의 양의 근
③ 양의 중근
④ 음의 중근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$의 판별식을 D라 하면
$D = (a + c)^2 - 4(ac - b^2)$
$\quad = (a - c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots$ ㉠ ($\because\ b \neq 0$)
$a > 0,\ ac > b^2 > 0$에서 $c > 0$이므로
(두 근의 곱)$= ac - b^2 > 0 \cdots$ ㉡
(두 근의 합)$= a + c > 0 \cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.

27. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $a<0,\ b>0,\ c<0,\ b^2-4ac>0$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 두 근은 모두 양이고 서로 다르다.
② 두 근은 모두 음이고 서로 다르다.
③ 양근 하나, 음근 하나를 가진다.
④ 양근, 음근, 0 을 가리지 않고 가질 수 있다.
⑤ 두 근은 서로 다른 부호이고, 양근이 음근의 절대값보다 크다.

해설

$b^2-4ac>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
$a<0,\ b>0,\ c<0$이므로
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}>0$
$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}>0$
$\therefore\ \alpha>0,\ \beta>0$

28. 이차방정식 $-x^2 + 4x + a = 0$의 두 근이 모두 양수이기 위한 a의 최대정수를 m, 이차방정식 $x^2 + 2(x+1) + k^2 - 9 = 0$의 두 근이 서로 다른 부호이기 위한 k의 최소 정수를 n이라 할 때, $m + n$의 값은?

① -8 ② -7 ③ -3 ④ -1 ⑤ 3

해설

(i) $-x^2 + 4x + a = 0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha + \beta = 4$
$\alpha\beta = -a > 0$에서 $a < 0$
$\frac{D}{4} = 4 + a \geq 0$에서 $a \geq -4$
$\therefore \ -4 \leq a < 0$
최대정수 $m = -1$
(ii) $x^2 + 2x + k^2 - 7 = 0$
두 근의 곱 $k^2 - 7 < 0$
$\therefore \ -\sqrt{7} < k < \sqrt{7}$
최소의 정수 $n = -2$
$\therefore \ m + n = -3$