1. $(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -3 ④ 1, 3 ⑤ -1

해설

$(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$

$=x^2+x^2i+2x+4xi-3+3i$

$=(x^2+2x-3)+(x^2+4x+3)i$

순허수를 만족하려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$이어야 한다.

$x^2+2x-3=0$이면서, $x^2+4x+3\neq 0$인 x값을 찾아야 한다.

$\therefore x=1$

2. 복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 다음을 만족하는 z 를 구하면?

$$z+\bar{z}=4, \quad z\cdot\bar{z}=7$$

① $z=1\pm\sqrt{3}i$　② $z=2\pm\sqrt{3}i$　③ $z=3\pm\sqrt{3}i$

④ $z=1\pm2\sqrt{3}i$　⑤ $z=2\pm2\sqrt{3}i$

해설

$z=a+bi$

$z+\bar{z}=2a=4, z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=7$

$\therefore a=2, b=\pm\sqrt{3}$

$\therefore z=2\pm\sqrt{3}i$

3. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16}=-4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

4. $\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 x들의 총합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2(x^2-1)^2} &= \sqrt{x^2(x^2-1)^2}i \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{(x^2-1)^2}i \\ &= |x|\cdot|x^2-1|i \\ &= |x|\cdot|x+1||x-1|i\end{aligned}$$

그러므로 $x=0,\ 1,\ -1$일 때 총합은 0이 된다.

5. 실수가 아닌 복소수 z 에 대하여 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이기 위한 조건은? (단, $z \neq \pm i$ 이고 $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $z \cdot \overline{z} = 1$

② $z + \overline{z} = 0$

③ $z + \overline{z} = 1$

④ $z + \overline{z} = -1$

⑤ $(z+1)(\overline{z}+1) = 1$

해설

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이면

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2}$$

$$\frac{z}{1+z^2} - \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2} = 0$$

$$\frac{z(1+\overline{z}^2) - \overline{z}(1+z^2)}{(1+z^2)(1+\overline{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\overline{z}) - z\overline{z}(z-\overline{z})}{(1+z^2)(1+\overline{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\overline{z})(1-z\overline{z})}{(1+z)(1+\overline{z}^2)} = 0$$

(분모)$\neq 0$ 이므로

(분자)$= (z-\overline{z})(1-z\overline{z}) = 0$

z 가 실수가 아니므로 $z \neq \overline{z}$

$\therefore z\overline{z} = 1$

6. 실수 x, y 에 대하여 $\dfrac{x}{1+i}+\dfrac{y}{1-i}=2-i$ 가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8 ② 7 ③ 5 ④ 4 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}&=\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}\\&=\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}\end{aligned}$$

$\therefore\ \dfrac{(x+y)+(-x+y)i}{2}=2-i$이므로,

복소수의 상등에서 $x+y=4,\ -x+y=-2$

이것을 풀면 $x=3,\ y=1$

따라서, $2x+y=2\times3+1=7$

7. 복소수 $z=1+4i$일 때, $\overline{x(2-i)}+y(1-i)=\bar{z}$가 성립하도록 하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $\bar{z}$는 복소수 z의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$)

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$z=1+4i$이므로 $\bar{z}=1-4i$이다.
주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}\overline{x(2-i)}+y(1-i) &= \bar{x}(\overline{2-i})+y(1-i)\\ &= x(2+i)+y(1-i)\end{aligned}$$

$\therefore\ x(2+i)+y(1-i)=1-4i$
$(2x+y)+(x-y)i=1-4i$
복소수가 서로 같을 조건에서
$2x+y=1,\ x-y=-4$
위 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=3$
$\therefore\ x+y=2$

8. 복소수 $x = a+bi(a,\ b$는 실수)가 $x^2 = 3+4i$, $x^3 = 2+11i$ 를 만족할 때 $a+b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x^3 = x^2 \times x$$
$$= (3+4i)(a+bi)$$
$$= (3a-4b)+(4a+3b)i$$

$(3a-4b)+(4a+3b)i = 2+11i$

$3a-4b = 2, 4a+3b = 11$

$\therefore a = 2, b = 1$ 이므로 $a+b = 3$

해설

$$x = \frac{x^3}{x^2} = a+bi$$

$$\frac{2+11i}{3+4i} = \frac{(2+11i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}$$
$$= \frac{50+25i}{25}$$
$$= 2+i$$

$\therefore a = 2, b = 1$

9. $i-2i^2+3i^3-4i^4+5i^5-6i^6+\cdots-100i^{100}=a+bi$ 라고 할 때, $a+b$의 값은?

① -100　② -50　③ 0　④ 25　⑤ 50

해설

준식$= i+2-3i-4+5i+6-7i-8+\cdots$
$=\{(1+5+9+\cdots+97)-(3+7+\cdots+99)\}i$
$\quad+\{(2+6+\cdots+98)-(4+8+\cdots+100)\}$
$=(1225-1275)i+(1250-1300)=-50-50i$ 따라서 $a=-50$, $b=-50$ 이므로 $a+b=-100$

10. 복소수 α, β 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

② $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$

③ $\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)} = \dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$(단, $\alpha \neq 0$)

④ $\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha$

⑤ $\alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$ 이면 α 는 허수이다.

해설

⑤ (반례) $\alpha = 2,\ \overline{\alpha} = 2$

11. $\alpha = 1 - i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha}^2 + \alpha^2\overline{\alpha}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $-2i$ ② 2 ③ $2i$

④ 4 ⑤ $2+3i$

해설

$\alpha = 1 - i$, $\overline{\alpha} = 1 + i$

$\alpha + \overline{\alpha} = 2, \alpha\overline{\alpha} = 2$

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}^2 + \alpha^2\overline{\alpha} &= \alpha\overline{\alpha}(\alpha + \overline{\alpha}) \\ &= 2 \cdot 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

12. 복소수 α, β 에 대하여 연산 $*$ 를 $\alpha * \beta = (\alpha+\beta) - \alpha\beta$ 라 하자. $z = \dfrac{5}{-2-i}$ 일 때, $z * \bar{z}$ 의 값은?

① -1　② 1　③ -9　④ 9　⑤ 0

해설

$z = -2 + i$, $\bar{z} = -2 - i$

$$
\begin{aligned}
z * \bar{z} &= (z + \bar{z}) - z\bar{z} \\
&= -4 - 5 \\
&= -9
\end{aligned}
$$

13. 다음 보기 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $\sqrt{-2}\sqrt{-5} = \sqrt{10}$	㉡ $\sqrt{-3}\sqrt{12} = -6$
㉢ $(-\sqrt{-2})^2 = -2$	㉣ $(\sqrt{-3})^3 = -3\sqrt{3}i$
㉤ $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = -2i$	㉥ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = -2$

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

㉢, ㉣, ㉤이 옳다.

㉠ $\sqrt{-2}\sqrt{-5} = -\sqrt{10}$

㉡ $\sqrt{-3}\sqrt{12} = 6i$

㉥ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = 2i$

14. 다음 식에서 등호가 처음 잘못 사용된 부분을 고르면?

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} = \frac{i^2}{i} = -i$$

① $\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$ ② $\sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$ ③ $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i}$

④ $\frac{1}{i} = \frac{i^2}{i}$ ⑤ $\frac{i^2}{i} = -i$

해설

$a > 0,\ b < 0$ 일 때 $\sqrt{\frac{a}{b}} \neq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

예를들면, $i = \sqrt{\frac{1}{-1}} \neq \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = -i$

15. $0 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$ 를 간단히 하면?

① $a(1-a)$ ② $a(a-1)$ ③ $a^2(a-1)$

④ $a^2(1-a)^2$ ⑤ $-a^2(1-a)^2$

해설

$a > 0$, $a-1 < 0$, $1-a > 0$, $-a < 0$ 이므로 $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$

$= \sqrt{a}\sqrt{-a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}$

$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}i \cdot \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-a}i$

$= \sqrt{a^2}\sqrt{(1-a)^2 i^2}$

$= -a(1-a) = a(a-1)$

16. 유리수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $(\sqrt{2}+i)^4+a(\sqrt{2}+i)^3+b(\sqrt{2}+i)^2+c(\sqrt{2}+i)+d=0$을 만족한다. 이 때, $a-b-c-d$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① -7　　② 3　　③ 1　　④ -1

해설

$(\sqrt{2}+i)^4=-7+4\sqrt{2}i$, $(\sqrt{2}+i)^3=-\sqrt{2}+5i$,

$(\sqrt{2}+i)^2=1+2\sqrt{2}i$

$(-7+4\sqrt{2}i)+a(-\sqrt{2}+5i)$

$+b(1+2\sqrt{2}i)+c(\sqrt{2}+i)+d=0$

$(-7-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d)$

$+(4\sqrt{2}+5a+2\sqrt{2}b+c)i=0$

$\therefore\ (-7+b+d)+(c-a)\sqrt{2}=0,$

$(5a+c)+(4+2b)\sqrt{2}=0$

$a,\ b,\ c,\ d$ 는 유리수이므로 $-7+b+d=0$:

$c-a=0,\ 5a+c=0,\ 4+2b=0$

$\therefore\ a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$

$\therefore\ a-b-c-d=-7$

17. $x = \dfrac{1+3i}{1+i}$ 일 때, $x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ 의 값은?

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $-1+i$

④ $-1-i$ ⑤ 1

해설

$x = 2 + i$

$(x-2)^2 = i^2 = -1$

$\therefore x^2 - 4x = -5$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x\left(x^2 - 4x\right) + 4x + 1 \\ &= -5x + 4x + 1 \\ &= -x + 1 \\ &= -1 - i\end{aligned}$$

18. $a_1,\ a_2,\ \cdots a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1 a_2\ \cdots\cdots\ a_{10} = 1$ 일 때, $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\cdots\sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음<보기>에서 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1	㉡ -1	㉢ i	㉣ $-i$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1 a_2\ \cdots\cdots\ a_{10} = 1$ 이면 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함)개 있다.

i) -1 이 $4k+2(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$$
$$= \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_{10}}\ i^{4k+2} = \sqrt{1}\cdot i^2 = -1$$

ii) -1 이 $4k(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$$
$$= \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_{10}}\ i^{4k}$$
$$= 1$$

i), ii)에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

19. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i$, $y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots ①$, $y^2 - x = i \cdots ②$ 에서

① - ② 하면 : $(x+y)(x-y) + (x-y) = 0$,

$(x-y)(x+y+1) = 0$

조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.

① + ②하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) = 2i$

$\therefore \ xy = 1 - i$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= (-1)^3 - 3(1-i)(-1) \\ &= 2 - 3i \end{aligned}$$

20. $(z-\bar{z})\times i$ 가 음수이고 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 와 $\dfrac{z^2}{1+z}$ 이 모두 실수일 때, z^2 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ② $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
④ $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $1+i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

$(z-\bar{z})\times i<0$ 에서 $-2b<0 \therefore b>0$

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이므로

$$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$\therefore\ z(1+\bar{z}^2)=\bar{z}(1+z^2) \Leftrightarrow (z\bar{z}-1)(z-\bar{z})=0$

$\therefore\ z\bar{z}=1\ (\because\ z-\bar{z}\neq 0)$

$a^2+b^2=1\cdots$㉠

한편, $\dfrac{z^2}{1+z}$ 이 실수이므로

$$\frac{z^2}{1+z}=\overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)}=\frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}}$$

$\Leftrightarrow\ z^2(1+\bar{z})=\bar{z}^2(1+z)$

$\Leftrightarrow\ (z-\bar{z})(z+\bar{z}+z\bar{z})=0$

$\therefore\ z+\bar{z}=-z\bar{z}=-1(\because\ z-\bar{z}\neq 0)$

$2a=-1\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(\because b>0\ )$

$$\therefore\ z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$