1. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + k$가 일차식 $x-1$을 인수로 가질 때, 이 다항식 $f(x)$를 인수분해 하면?

① $(x-2)(x-1)(x+1)$　　② $(x-1)x(x+2)$

③ $(x+1)(x-1)(x+2)$　　④ $(x-2)(x-1)(x+2)$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)$

해설

$f(x) = (x-1)Q(x) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0$

$\therefore\ f(1) = 2 + k = 0, \qquad \therefore\ k = -2$

즉, $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$\qquad = (x-1)(x+1)(x+2)$

2. 임의의 두 복소수 a, b 에 대하여 연산 $\oplus$ 를 $a \oplus b = ab - (a+b)$ 로 정의한다. $\mathrm{Z} = \dfrac{5}{2-\mathrm{i}}$ 일 때, $\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}}$ 의 값은?

① 1　　② $1+2i$　　③ $1-2i$

④ -1　　⑤ $2-2i$

해설

$\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}} = Z\overline{Z} - (Z + \overline{Z})$, $Z = 2+i$, $\overline{Z} = 2-i$ 이므로 연산을 계산해보면, $5-4=1$ 답은 ①

3. 이차방정식 $3x^2 - 6x + 4 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = \dfrac{4}{3}$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= 8 - 3 \times \dfrac{4}{3} \times 2 = 0$

4. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 <u>틀린</u> 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

5. 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $f(x)$를 $2x-1$으로 나눌 때의 몫과 나머지는?

① 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$
② 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : R
③ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$
④ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : R
⑤ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $2R$

해설

$x-\frac{1}{2}$에 2를 곱하면 $2x-1$

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=(2x-1)\frac{1}{2}Q(x)+R$$

6. 다음 중 식의 전개가 바르지 않은 것을 고르면?

① $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

③ $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=x^4-8x^2+12$

④ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

⑤ $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-b^2-c^2+2bc$

해설

$(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$

$x^2-x=Y$라 놓자.

$$\begin{aligned}(Y-6)(Y-2)&=Y^2-8Y+12\\&=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\&=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$

7. x의 다항식 x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때, 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 a, b의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때,
몫을 $x+q$라 하면 (일반적으로 $px+q$로 해야겠지만 x^3의 계수가 1이므로 $x+q$)
$x^3+ax+b=(x^2-3x+2)(x+q)+2x+1$
$\therefore\ x^3+ax+b=(x-2)(x-1)(x+q)+2x+1$
이 등식은 x에 관한 항등식이므로
$x=1$을 대입하면 $1+a+b=2+1\cdots$ ㉠
$x=2$를 대입하면 $8+2a+b=4+1\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-5$, $b=7$
$\therefore\ a+b=2$

8. $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 12$가 $x - 1$로는 나누어 떨어지고, $x + 1$로 나누었을 때는 나머지가 -14이다. 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -12 ② 12 ③ -20 ④ 20 ⑤ -36

해설

나머지 정리에 의해 $f(1) = 0, f(-1) = -14$

$f(1) = 3 + a + b - 12 = 0 \cdots$ ①

$f(-1) = -3 + a - b - 12 = -14 \cdots$ ②

①, ②를 연립하면, $a = 5,\ b = 4$

$\therefore\ ab = 20$

9. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -4이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q_1(x)+5 \\ &= (x+2)Q_2(x)-4 \\ &= (x-1)(x+2)Q_3(x)+R(x) \end{aligned}$$

$R(x)=ax+b$ 라 하면

$f(1)=5$이므로

$R(1)=a+b=5 \cdots$①

$f(-2)=-4$이므로

$R(-2)=-2a+b=-4\cdots$②

①, ②에 의해 $a=3,\ b=2$이다.

$\therefore\ R(x)=3x+2 \Rightarrow R(2)=8$

10. $(x^2+x)(x^2+x-8)+12$를 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$ ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

해설

$x^2+x=A$로 놓으면 주어진 식은

$$A(A-8)+12=A^2-8A+12$$
$$=(A-2)(A-6)$$

$$\therefore(\text{준식})=(x^2+x-2)(x^2+x-6)$$
$$=(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)$$

11. $a+b+c=4$, $ab+bc+ca=3$, $abc=1$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하면?

① 30　② 31　③ 32　④ 33　⑤ 34

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

위 식에 따라 $a^2+b^2+c^2+6=16$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=10$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=4\times(10-3)+3\times1$

$=31$

12. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3-kx+6일 때, 두 다항식의 합은?

① $2x^2-3x-5$　② $2x^2-3x+1$　③ $2x^2-x-1$　④ $2x^2+x-3$　⑤ $2x^2+2x-4$

해설

최소공배수는 최대공약수를 인수로 가지므로

$x=1$일 때 $1-k+6=0$　$\therefore k=7$

$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$이므로

두 다항식은 $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x+3)$

$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2-x-1$

13. 이차항의 계수가 1 인 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3-3x+2 일 때, $A+B$ 는?

① $2x^2-x-1$ ② $2x^2+x+1$ ③ $2x^2-2x-1$
④ $2x^2-2x+1$ ⑤ $2x^2-2x+3$

해설

$G=x-1,\ L=(x-1)^2(x+2)$
$A=(x-1)^2=x^2-2x+1,\ B=(x-1)(x+2)=x^2+x-2$
$A+B=2x^2-x-1$

14. $1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}$을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}$$
$$=\{1+(-i)+(-1)+i\}+\{1+(-i)+(-1)+i\}+1$$
$$=1$$

15. $a-b<0$ 이고 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2}-|a+b|$ 를 간단히 하면?

① b　　② $2b$　　③ $a-2b$

④ $2a+b$　　⑤ 0

해설

$a-b<0$, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이므로 $a<0,\ b<0$

따라서 $a-b<0,\ a+b<0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-b)^2}-|a-b| &= |a-b|-|a+b|\\ &= -(a-b)+(a+b)\\ &= -a+b+a+b=2b\end{aligned}$$

16. 방정식 $x^2-[x]-4=0\ (0<x<4)$의 모든 근의 합은?

① $2\sqrt{6}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 3 ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

이차방정식 $x^2-[x]-4=0$에서

(i) $0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$x^2-4=0, (x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.

(ii) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$x^2-5=0,\ (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$

$\therefore x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{5}$

그런데 $1\le x<2$이므로 해가 없다.

(iii) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로

$x^2-6=0,\ (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})=0$

$\therefore x=-\sqrt{6}$ 또는 $x=\sqrt{6}$

그런데 $2\le x<3$이므로 $x=\sqrt{6}$

(iv) $3\le x<4$일 때, $[x]=3$이므로

$x^2-7=0,\ (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})=0$

$\therefore x=-\sqrt{7}$ 또는 $x=\sqrt{7}$

그런데 $3\le x<4$이므로 해가 없다.

따라서 모든 근의 합은 $\sqrt{6}$

17. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$의 두 근의 차가 2일 때, 실수 m의 값은?

① $\pm 2\sqrt{2}$ ② $\pm 2\sqrt{3}$ ③ $\pm 2\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{6}$ ⑤ $\pm 2\sqrt{7}$

해설

두 근을 α, $\alpha + 2$라고 하면,
근과 계수와의 관계에서
$\alpha + (\alpha + 2) = m \quad \cdots\cdots ㉠$
$\alpha(\alpha + 2) = 4 \quad \cdots\cdots ㉡$
㉡에서 $\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0$
$\therefore \ \alpha = -1 \pm \sqrt{5}$
이것을 ㉠에 대입하면
$m = 2(-1 \pm \sqrt{5}) + 2 = \pm 2\sqrt{5}$

18. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$과 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는
이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β
라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 2k,\ \alpha\beta = 2k + 3$
$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로
$20 = (2k)^2 - 4(2k + 3),\ 4k^2 - 8k - 12 = 20$

$k^2 - 2k - 8 = 0$
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

19. 가로의 길이와 세로의 길이의 합이 20 인 직사각형의 넓이를 y라고 할 때, y의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

가로의 길이를 x, 세로의 길이를 $20 - x$라고 하자.

$$\begin{aligned} y &= x \times (20 - x) \\ &= -x^2 + 20x \\ &= -(x^2 - 20x) \\ &= -(x - 10)^2 + 100 \end{aligned}$$

따라서 100 이 최댓값이다.

20. 지면으로부터 초속 20m 로 위로 던진 공의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y=-5x^2+20x$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 20 m

해설

$y=-5x^2+20x$ 에서 $y=-5(x-2)^2+20$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 20m 이다.

21. $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=8$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① 26 ② 48 ③ 84 ④ 96 ⑤ 112

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^c+2(ab+bc+ca)$

$49=21+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=14$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=(14)^2-2(8\times7)$

$=84$

22. x에 대한 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+8$은 $(x+2)^2$으로 나누어 떨어지고, $1-f(x)$는 x^2-1로 나누어 떨어질 때, $f(x)$의 상수항은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$f(x)+8=(x+2)^2(ax+b)\cdots$ ㉠

$1-f(x)=(x^2-1)Q(x)\cdots$ ㉡

㉡에서 $f(1)=1,\ f(-1)=1$

그러므로 ㉠에서

$1+8=9(a+b)\cdots$ ㉢

$1+8=-a+b\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $a=-4,\ b=5$

$\therefore\ f(x)=(x+2)^2(-4x+5)-8$

$\therefore$ 상수항은 $f(0)=2^2\cdot 5-8=12$

23. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1<k<\frac{5}{4}$ ② $1\le k\le\frac{5}{4}$ ③ $-5<k<-\frac{5}{4}$

④ $k<1,\ k>\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}<k<1$

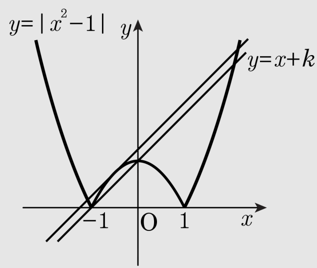
해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여 분리하면

$|x^2-1|=x+k$, $y=|x^2-1|$, $y=x+k$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면

다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1$, $y=x+k$가

두 점에서 만나야하므로

$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.

$D=1-4k+4>0 \quad \therefore\ k<\frac{5}{4}$

또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로

$0<-1+k \quad \therefore\ k>1$

$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$

24. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 는 $x=2$ 일 때, 최솟값 -3 을 갖고, 그래프가 점 $(-1,\ 6)$ 을 지난다고 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -3)$ 이므로 $y=a(x-2)^2-3$

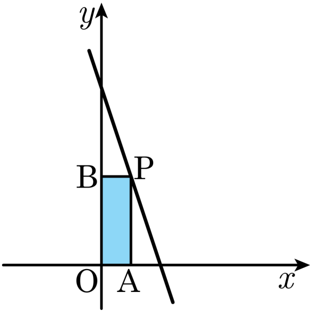
점 $(-1,\ 6)$ 을 대입하면 $a=1$

$y=(x-2)^2-3=x^2-4x+1$ 에서

$a=1$, $b=-4$, $c=1$

따라서 $a+b+c=-2$ 이다.

25. 다음 그림과 같이 일차함수 $y = -x + 4$ 의 그래프 위의 한 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 할 때, 직사각형 OAPB 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

A 의 좌표를 $(t,\ 0)$ 이라고 하면 P 의 좌표는

$(t,\ -t+4)$ 이고 B 의 좌표는$(0,\ -t+4)$

$\therefore \square\mathrm{OAPB} = t \times (-t+4) = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4$

$t = 2$ 일 때, 넓이의 최댓값 4