1. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2-3x+2=a+bx+cx(x-1)+dx(x-1)(x-2)$가 항상 성립할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면? (단, a, b, c, d는 상수)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x=0$을 대입하면 $a=2$
$x=1$을 대입하면 $b=-2$
$x=2$을 대입하면 $c=1$
3차항은 없으므로 $d=0$
$\therefore\ a+b+c+d=1$

2. 두 실수 x, y에 대하여 등식 $(1+i)(x-yi)=3+i$가 성립 할 때, $2x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -1　　② 1　　③ 3　　④ 5　　⑤ 7

해설

$(x+y)+(x-y)i=3+i$

$\therefore\ x+y=3,\ x-y=1$

$\therefore\ x=2,\ y=1$

$\therefore\ 2x+y=5$

3. $\dfrac{3+4i}{1+3i}$ 를 $a+bi$ 의 꼴로 나타 낼 때, $a-b$ 의 값은? (단, a , b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 2　　② -2　　③ 1　　④ -1　　⑤ 0

해설

분모의 실수화를 해준다.

$$\frac{3+4i}{1+3i}=\frac{(3+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

$\therefore a-b=2$

4. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나누어떨어진다고 한다. 이 때, $-3(m+n)$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 14 ⑤ 18

해설

$$f(x) = x^3+mx^2+nx+1$$
$$= (x+1)Q(x)+5$$

$$f(x) = x^3+mx^2+nx+1$$
$$= (x-2)Q'(x)$$

$$\therefore f(-1) = -1+m-n+1 = 5$$
$$f(2) = 8+4m+2n+1 = 0$$
$$\therefore m = \frac{1}{6},\ n = -\frac{29}{6}$$
$$\therefore m+n = -\frac{14}{3},\ -3(m+n) = 14$$

5. x에 대한 이차방정식 $(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 합은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$$\frac{D}{4}=(-2m)^2-(m+3)(2m-1)=0$$

$$4m^2-(2m^2+5m-3)=0$$

$$2m^2-5m+3=0$$

$$(m-1)(2m-3)=0$$

$\therefore m=1$ 또는 $\frac{3}{2}$

$$\therefore 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

6. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계를 이용하면,

$\alpha+\beta=-3 \quad \alpha\beta=1$

$$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$$
$$=-3+2=-1$$

7. 함수 $y = \dfrac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$ 이므로
분모가 최소가 될 때 y 가 최대이다.

$\therefore\ x = 1$ 일 때 최댓값 $\dfrac{6}{3} = 2$

8. $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{30}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① 1　② -1　③ -2　④ 2　⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i\ ,\ \frac{1-i}{1+i} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$f(i) = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30} = (-i)^{30} = (i^4)^7 i^2$$

$$= -1 f(-i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30} = i^{30}$$

$$= (i^4)^7 i^2 = -1$$

$$\therefore f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

$$= f(i) + f(-i) = -1 - 1 = -2$$

9. $\overline{z - zi} = 1 - i$ 를 성립시키는 복소수 z 은?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $-i$ ② 0 ③ i

④ $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ ⑤ $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

해설

$$\begin{aligned} \overline{z - zi} &= \overline{z(1-i)} \\ &= \bar{z} \cdot \overline{1-i} \\ &= \bar{z}(1+i) \\ \bar{z}(1+i) &= (1-i) \end{aligned}$$

$$\therefore \ \bar{z} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i$$

$$\therefore \ z = i$$

10. x에 관한 이차방정식 $x^2 - kx - 2k = 0$의 두 근을 α, β라 하자. $\alpha^2 = 6 + 2\sqrt{5}$ (단, $\alpha > 0$) 일 때, 유리수 k의 값은?

① -12 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 12

해설

$x^2 - kx - 2k = 0$의 두 근이 α, β

$\alpha + \beta = k$, $\alpha\beta = -2k$

$\alpha^2 = 6 + 2\sqrt{5}$, $\alpha = \sqrt{5} + 1$

한 근이 $1 + \sqrt{5}$이면 β는 $1 - \sqrt{5}$

$\therefore\ \alpha + \beta = 2 = k$

11. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(a+1)x^2+2ax+a=0$이 중근을 갖도록 하는 양수 a의 값과 그 때의 중근 α의 값의 합 $a+\alpha$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

조립제법을 이용한다 $f(-1)=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a+1 & 2a & a \\ & & -1 & -a & -a \\ \hline & 1 & a & a & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad (x+1)(x^2+ax+a)=0$

$x^2+ax+a=0$에 $x=-1$을 대입하면 0이 아니므로

x^2+ax+a가 중근을 갖는다.

중근일 조건 : 판별식$=0$

$\therefore \quad a^2-4a=0$

$a(a-4)=0 \quad \Rightarrow \quad a=0$ 또는 $a=4$

$\therefore$ 양수 $a=4 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x+4=0(x+2)^2=0$

$\Rightarrow$ 중근 $\alpha=-2 \Rightarrow \quad a+\alpha=2$

12. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30개이고 배점은 80점이다. 문항별 배점은 2점, 3점, 4점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2점 문항 개수를 x, 3점 문항을 y,
4점 문항을 z라 하자
$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠
$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡
㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow \quad y = 40 - 2x$
㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow \quad z = x - 10$
$\therefore \quad x = 10$이면 $z = 0$
$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음
$\therefore \quad x \geq 11$, 최소 11문항

13. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0 ② -1 ③ 1 ④ -10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$$

14. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 14(x > 0)$ 일 때, $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ 의 값은?

① 36　　② 44　　③ 52　　④ 68　　⑤ 82

해설

$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = (x + \dfrac{1}{x})^2 - 2$ 이므로

$x + \dfrac{1}{x} = 4\ (\because x > 0)$

$x^3 + \dfrac{1}{x^3} = (x + \dfrac{1}{x})^3 - 3(x + \dfrac{1}{x}) = 52$

15. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 몫이 $A(x)$, 나머지가 a이고, $x+2$로 나누면 몫이 $B(x)$, 나머지가 b라고 한다. 이때, $A(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지를 a, b로 나타내면?

① $a-b$ ② $\frac{a-b}{2}$ ③ $\frac{a-b}{3}$ ④ $\frac{a-b}{4}$ ⑤ $\frac{a-b}{5}$

해설

$f(x) = (x-1)A(x) + a \cdots$ ①

$f(x) = (x+2)B(x) + b \cdots$ ②

①, ②에 각각 $x=1, x=-2$를 대입하면

$f(1) = a, f(-2) = b$

$A(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해 $A(-2)$이다.

①에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2) = -3A(-2) + a = b$

$\therefore A(-2) = \frac{a-b}{3}$

16. $\dfrac{\bar{z}+1}{z}+\dfrac{z-1}{\bar{z}}=i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 z^2의 값을 구하면?

① ± 1　② $\pm 2i$　③ ± 2　④ $\pm i$　⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z = a+bi \\ z = a-bi \end{cases}$$

$$\frac{\bar{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\bar{z}}=i$$

$$\frac{\bar{z}^2+\bar{z}+z^2-z}{z\bar{z}}=i$$

$$\frac{a^2-2abi-b^2+a-bi+a^2+2abi-b^2-a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=i$$

$$\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{-2b}{a^2+b^2}i=i$$

$$a^2=b^2,\ \frac{-2b}{a^2+b^2}=+1$$

$$\therefore\ a=\pm 1, b=-1$$

$$z=\pm 1-i\ ,\ z^2=\pm 2i$$

17. 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 의 그래프가 직선 $y = mx - 2$보다 위쪽에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $-6 < m < 2$　② $-4 < m < 1$　③ $-2 < m < 0$

④ $2 < m < 5$　⑤ $4 < m < 6$

해설

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2 - 2x + 2 > mx - 2$ 가 성립하므로
$x^2 - (m+2)x + 4 > 0$ 에서
이차방정식 $x^2 - (m+2)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면
$D = (m+2)^2 - 16 < 0$
$(m+6)(m-2) < 0$
$\therefore -6 < m < 2$

18. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x+y=2 \\ y-z=a \end{cases}$ 가 실수해를 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 $\alpha \le a \le \beta$ 라고 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

① -4　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

$x=2-y, z=y-a$ 이므로

$(2-y)^2+y^2+(y-a)^2=3$

즉, $3y^2-2(a+2)y+a^2+1=0$

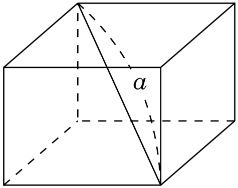
$D/4=(a+2)^2-3(a^2+1)=-2a^2+4a+1\ge 0$

$2a^2-4a-1\le 0$

$\therefore \dfrac{2-\sqrt{6}}{2}\le a\le \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=2$

19. 다음 그림과 같은 직육면체에서 대각선의 길이가 a이고, 모든 모서리의 길이의 합이 b일 때, 이 직육면체의 겉넓이는?



① $\frac{1}{16}b^2 - a^2$ ② $\frac{1}{8}b^2 - a^2$ ③ $\frac{1}{4}b^2 - a^2$
④ $\frac{1}{8}b^2 + a^2$ ⑤ $\frac{1}{16}b^2 + a^2$

해설

가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z라 하면

$4(x+y+z) = b,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = a$

$\therefore\ x+y+z = \frac{1}{4}b,\ x^2+y^2+z^2 = a^2$

따라서, 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)$$
$$= \left(\frac{1}{4}b\right)^2 - a^2$$
$$= \frac{1}{16}b^2 - a^2$$

20. 두 다항식 x^2-x+p 와 $x^3+x^2+x+p+3$ 이 사차식의 최소공배수를 갖도록 p의 값을 정하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

다항식 A, B 의 최소공배수 L , 최대공약수를 G 라 하면
$AB=GL$ 에서 G 는 1 차식이다. ($\because$ AB는 5차식, G는 4차식)
$\therefore$ 최대공약수는 $x+1$, $x+1$은 x^2-x+p 의 약수이므로
$2+p=0$
$\therefore$ $p=-2$