

1. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x+2$, 최소공배수가 $x^3+3x^2-10x-24$ 라고 한다. 이 때, 두 다항식을 바르게 구한 것은?

- ① x^2-x-6, x^2+6x+8 ② x^2-3x-1, x^2+x+8
③ x^2-4x+3, x^2-x+2 ④ x^2-x-2, x^2-3x+8
⑤ x^2-3x-6, x^2+3x+7

해설

두 다항식을 $A=aG, B=bG$ (a, b 는 서로소)라고 하면
두 식의 최대공약수가 $x+2$ 이므로
 $A=a(x+2), B=b(x+2)$
따라서, $L=ab(x+2)$
 $=x^3+3x^2-10x-24$ 이다.
이 때, 최소공배수 L 은 최대공약수 $x+2$ 를 인수로 가지므로
조립제법을 이용하면
 $L=(x+2)(x-3)(x+4)$
 a, b 는 일차식이므로
 $a=x-3, b=x+4$ 또는 $a=x+4, b=x-3$
따라서, 두 다항식은
 $(x-3)(x+2)=x^2-x-6$ 과 $(x+4)(x+2)=x^2+6x+8$ 이다.

2. x 에 대한 세 다항식 $f(x), g(x), h(x)$ 가 항등식 $(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$ 를 만족한다. 이 때, $f(x), g(x), h(x)$ 의 최소공배수를 구하면?
- ① $f(x)$ ② $xf(x)$
- ③ $x(x+1)f(x)$ ④ $(x-1)f(x)$
- ⑤ $(x+1)(x-1)f(x)$

해설

$$(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x) \text{ 에 } \forall x$$

- ① 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $x = 0, -1$ 을 대입하면 $f(0) = f(-1) = 0$
 ② 다항식 $g(x)$ 에 대하여 $x = 1, -1$ 을 대입하면 $g(1) = g(-1) =$

- ② 다항식 $g(x)$ 에 대하여 $x = 1, -1$ 을 대입하면 $g(1) = g(-1) =$

- 0
- ⊗ 편지 3 : () 에 대하 인 0 1 0 대하 인면 : (0) : (1) : 0

③ 다항식 $h(x)$ 에 대하여

①, ②, ③으로부터

$$f(x) = x(x+1)G, \quad g(x) = (x-1)(x+1)G, \quad h(x) = x(x-1)G$$
$$f(x) = x(x+1)G, g(x) = (x-1)(x+1)G$$

$\therefore f(r), g(r), h(r)$ 의 첫숫곤배수는

$$x(x+1)(x-1)G = (x-1)f(x)$$

3. 두 다항식 $2x^2 + 2x - 4$ 와 $4x^3 - 4$ 에 관한 설명이다. 옳지 않은 것을 고르면?
- ① 두 다항식은 $(x - 1)$ 로 나누어 떨어지므로, $(x - 1)$ 은 두 다항식의 공약수이다.
- ② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.
- ③ $4(x - 1)^3(x + 2)^2(x^2 + x + 1)$ 은 두 다항식의 공배수이다.
- ④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x - 1)$ 이다.
- ⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x + 2)(x - 1)^2(x^2 + x + 1)$ 이다.

해설

$$\begin{aligned}2x^2 + 2x - 4 &= 2(x - 1)(x + 2) \\4x^3 - 4 &= 4(x - 1)(x^2 + x + 1) \\ \text{최대공약수} &: 2(x - 1) \\ \text{최소공배수} &: 4(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 1)\end{aligned}$$

4. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?
- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
 - ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
 - ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
 - ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
 - ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서
 $(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$
 $(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$
(좌변)
 $= \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$
 $= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2$
 $= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
 $= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$
따라서, $2a^2 + 2b^2 - 2c^2 = 0$ 이므로 $a^2 + b^2 = c^2$
그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

5. $99 \times 101 \times (100^2 + 100 + 1) \times (100^2 - 100 + 1)$ 을 계산하면?

- ① $100^6 - 1$ ② $100^6 + 1$ ③ $100^9 - 1$
④ $100^9 + 1$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} 100 &= a \text{로 치환 하면} \\ (\text{준식}) &= (a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1) \\ &= (a^3-1)(a^3+1) \\ &= a^6-1 \\ &= 100^6-1 \end{aligned}$$

6. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형 ② 이등변삼각형
③ 정삼각형 ④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \text{ 에서 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = 0$$

$$\frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) = 0$$

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0 \text{ 이고,}$$

$$a, b, c \text{ 는 실수이므로, } a-b=0, b-c=0, c-a=0$$

$$\therefore a=b=c$$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

7. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$$

$$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$= 4\{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)\}$$

$$= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

8. 세 실수 a, b, c 가 $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, $a^3 + b^3 + c^3 = 24$ 를 만족시킬 때, $a^4 + b^4 + c^4 + 1$ 의 값을 구하면?

- ① 69
- ② 70
- ③ 71
- ④ 72
- ⑤ 73

해설

$$a + b + c = 3 \cdots \textcircled{1}$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 9 \cdots \textcircled{2}$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = 24 \cdots \textcircled{3}$$

이라 하면,
②식에서
$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 9$$
$$9 - 2(ab + bc + ca) = 9$$
$$\therefore ab + bc + ca = 0 \cdots \textcircled{4}$$

③식에서
$$a^3 + b^3 + c^3$$
$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$
$$24 = 3 \cdot (9 - 0) + 3abc$$
$$\therefore abc = -1 \cdots \textcircled{5}$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + 1$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 1$$
$$= 81 - 2 \cdot 6 + 1 = 70$$
$$(\because a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$
$$= (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c)$$
$$= 0 - 2 \times (-1) \times 3$$
$$= 6)$$

9. $x+y+z=3$, $xy+yz+zx=-1$ 일 때 $x^2+y^2+z^2$ 의 값을 구하면?

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2 &= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \\ &= 9 + 2 = 11\end{aligned}$$

10. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 모든 모서리의 길이의 합이 20m이고 대각선의 길이가 3m일 때, 이 상자의 겉넓이는 몇 m²인가?

① 12 m² ② 13 m² ③ 14 m² ④ 15 m² ⑤ 16 m²

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$$4(a + b + c) = 20, a + b + c = 5$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3, a^2 + b^2 + c^2 = 9$$

$$\begin{aligned} \text{(겉넓이)} &= 2(ab + bc + ca) \\ &= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 25 - 9 = 16(\text{m}^2) \end{aligned}$$

11. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144 ② 196 ③ 288 ④ 308 ⑤ 496

해설

세 모서리를 x, y, z 라 하면

$$x + y + z = 22 \cdots \cdots ①$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 14 \cdots \cdots ② \text{이고}$$

겉넓이는 $2(xy + yz + zx)$ 이다.

$$①, ② \text{에서 } 22^2 = 14^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore 2(xy + yz + zx) = 288$$

12. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$, $abc = -1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ ab + bc + ca &= -1 \\ a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= 2 \times (6 - (-1)) - 3 = 11\end{aligned}$$

13. $x + y = 2$, $x^3 + y^3 = 14$ 일 때, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하면?

① 12

② 32

③ 52

④ 82

⑤ 102

해설

$$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \cdots (*)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$\therefore 14 = 8 - 6xy$$

$$\therefore xy = -1 \cdots \cdots ①$$

$$x^3 + y^3 = 14 \cdots \cdots ②$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4 - 2(-1) = 6 \cdots \cdots ③$$

①, ②, ③을 (*)에 대입하면

$$x^5 + y^5 = 6 \times 14 - 2 = 82$$

14. $x - \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은 ?

① $\pm 6\sqrt{5}$

② $\pm 5\sqrt{5}$

③ $\pm 3\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{5}$

⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3 \text{에서}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \pm \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \pm 5\sqrt{5} - 3(\pm \sqrt{5}) = \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 3(\pm 2\sqrt{5}) - (\pm \sqrt{5}) = \pm 5\sqrt{5}$$

15. $a + b = 4$, $a^2 + b^2 = 10$ 일 때, $a^5 + b^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$$a + b = 4, a^2 + b^2 = 10$$

$$ab = \frac{1}{2}((a + b)^2 - (a^2 + b^2)) = 3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 28$$

$$\begin{aligned}\therefore a^5 + b^5 &= (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - a^2b^2(a + b) \\ &= 28 \times 10 - 9 \times 4 \\ &= 244\end{aligned}$$

16. 등식 $(2k+1)y - (k+3)x + 10 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$(\text{준식}) = (y - 3x + 10) + (2y - x)k = 0$$

$$\therefore 2y = x, y - 3x = -10$$

$$\therefore x = 4, y = 2$$

$$\therefore x + y = 6$$

17. 등식 $(2k+1)y - (k+3)x + 10 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$(\text{준식}) = (y - 3x + 10) + (2y - x)k = 0$$

$$\therefore 2y = x, \quad y - 3x = -10$$

$$\therefore x = 4, \quad y = 2$$

$$\therefore x + y = 6$$

18. k 의 값에 관계없이 $(2k^2 - 3k)x - (k + 2)y - (k^2 - 4)z = 28$ 이 항상 성립하도록 x, y, z 의 값을 정할 때, $3x + y + z$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 식을 k 에 대해 정리하면

$$(2x - z)k^2 - (3x + y)k - (2y - 4z + 28) = 0$$

$$\therefore 2x - z = 0, 3x + y = 0, 2y - 4z + 28 = 0$$

$z = 2x$, $y = -3x$ 을 $2y - 4z + 28 = 0$ 에 대입하면

$$x = 2, y = -6, z = 4$$

$$\therefore 3x + y + z = 4$$

19. 등식 $2x^2 + x + 5 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 가 x 에 대한 항등식일 때 $a + b + c$ 의 값은?

① 12

② 15

③ 18

④ 21

⑤ 24

해설

좌변을 전개하여 계수를 비교해서 a, b, c 를 구할 수 있다.
여기에서는 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x = 2$ 를 대입해서 구한다.

$$15 = a + b + c$$

20. 모든 실수 x 에 대하여 $(x-1)^{10} = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_{10}$ 이 성립할 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 의 값은? (단, a_i 는 상수, $i = 0, 1, 2, \dots, 10$)

- ① -2^{10} ② -2^9 ③ 2^9 ④ 2^{10} ⑤ 2^{55}

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0 \cdots \textcircled{1}$
양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} = 2^{10} \cdots \textcircled{2}$
① - ②하면 $2(a_1 + a_3 + \cdots + a_9) = -2^{10}$
 $\therefore a_1 + a_3 + \cdots + a_9 = -2^9$

21. $(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4(2x - 1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4 \cdot (2x - 1)^7$
 $= a_0x^{19} + a_1x^{18} + a_2x^{17} + \cdots + a_{19}$ 로 놓으면
계수들의 총합 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{19}$ 는 양변에 $x = 1$ 을 대입한
결과와 같으므로 항등식의 성질에서
 $(1 + 2 - 3 + 2)^4 \cdot (2 - 1)^7 = 2^4 = 16$

22. 다음 □안에 들어갈 식이 바르게 연결되지 않은 것은?

$$\begin{aligned} & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\ &= (b-c)a^2 - \boxed{\text{가}} a + \boxed{\text{나}}(b-c) \\ &= \boxed{\text{다}} \{a^2 - \boxed{\text{라}} a + \boxed{\text{나}}\} \\ &= (b-c)(a-b)\boxed{\text{마}} \end{aligned}$$

- ① (가) $(b^2 - c^2)$ ② (나) bc ③ (다) $(b - c)$
- ④ (라) $(b + c)$ ⑤ (마) $(c - a)$

해설

$$\begin{aligned} & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\ &= (b-c)a^2 + b^2c - ab^2 + c^2a - bc^2 \\ &= (b-c)a^2 - \boxed{(b^2 - c^2)} a + \boxed{bc}(b-c) \\ &= \boxed{(b-c)} \{a^2 - \boxed{(b+c)} a + \boxed{bc}\} \\ &= (b-c)(a-b)\boxed{(a-c)} \end{aligned}$$

23. $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$ 을 인수분해하면?

- ① $-(a-b)(b-c)(c-a)$ ② $-(a+b+c)(a-b-c)$
③ $-(a+b)(b+c)(c+a)$ ④ $(a+b)(b+c)(c+a)$
⑤ $(a-b)(b-c)(c-a)$

해설

전개하여 a 에 대한 내림차순으로 정리한 후, 인수분해 한다.

$$\begin{aligned} & ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) \\ &= (b-c)a^2 - (b^2 - c^2)a + bc(b-c) \\ &= (b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) \\ &= -(a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

24. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$ 을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$

② $(a-b)(b-c)(a-c)$

③ $-(b-a)(b-c)(c-a)$

④ $(a-b)(b-c)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (c-b)a^2 + (b^2 - c^2)a + bc(c-b) \\ &= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\} \\ &= (c-b)(a-b)(a-c) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

25. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b = -\sqrt{2}$, $b + c = \sqrt{2}$ 일 때, $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 - 3(a - b)(b - c)(c - a)$ 의 값은?

- ① 0 ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} & (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 - 3(a - b)(b - c)(c - a) \\ &= \{(a - b) + (b - c) + (c - a)\} \\ & \quad \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \\ & \quad - (a - b)(b - c) - (b - c)(c - a) - (c - a)(a - b)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

26. 가로 길이가 x cm, 세로 길이가 y cm, 높이가 z cm 인 직육면체에서 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 46$ 일 때, 이 직육면체의 겉넓이는 몇 cm^2 인가?

① 45 cm^2

② 50 cm^2

③ 54 cm^2

④ 58 cm^2

⑤ 60 cm^2

해설

공식 $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ 을 이용하여
주어진 조건을 대입하면 $xy + yz + zx = 27$
겉넓이는 $2(xy + yz + zx)$ 이므로 54

27. $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$, $a^3+b^3+c^3=2$ 일 때, abc 의 값은?

- ① $-\frac{5}{3}$ ② 0 ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{ 이므로} \\ & 5 = 1 - 2(ab+bc+ca) \\ & \therefore ab+bc+ca = -2 \\ & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{ 이므로} \\ & 2 - 3abc = 1 \cdot (5+2) \\ & \therefore abc = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$