

1. 실수 a, b 에 대하여 $(a+b-5)^2 + \sqrt{(ab+3)^2} = 0$, $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 일 때, $a-b$ 의 값은?

① $-\sqrt{13}$

② $-\sqrt{37}$

③ $\sqrt{19}$

④ $\sqrt{13}$

⑤ $\sqrt{37}$

해설

$$(a+b-5)^2 + \sqrt{(ab+3)^2} = (a+b-5)^2 + |ab+3| = 0 \rightarrow$$

$$a+b=5, ab=-3, (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 37$$

$$a-b = \pm\sqrt{37} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \text{ 가 성립하려면, } a < 0 \text{ 그리고 } b \geq 0 \text{ 일 때이다.}$$

$$\therefore a-b < 0 \text{ 이므로 } \textcircled{1} \text{에서 } a-b = -\sqrt{37}$$

2. a, b 가 $-2, -1, 0, 1, 2$ 중 하나일 때, 등식 $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 조건은

i) $a+b=0$ 이고 $a-b \neq 0$

ii) $a-b < 0$ 이고 $a+b > 0$

i)의 경우 $(-2, 2) (2, -2) (-1, 1) (1, -1)$

ii)의 경우 $(-1, 2) (0, 2) (0, 1) (1, 2)$

$\therefore$ 모두 8개

3. 다음 보기 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $\sqrt{-2}\sqrt{-5} = \sqrt{10}$

㉡ $\sqrt{-3}\sqrt{12} = -6$

㉢ $(-\sqrt{-2})^2 = -2$

㉣ $(\sqrt{-3})^3 = -3\sqrt{3}i$

㉤ $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = -2i$

㉥ $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = -2$

- ① 2 개
- ② 3 개
- ③ 4 개
- ④ 5 개
- ⑤ 6 개

해설

㉢, ㉣, ㉥이 옳다.

㉠ $\sqrt{-2}\sqrt{-5} = -\sqrt{10}$

㉡ $\sqrt{-3}\sqrt{12} = 6i$

㉤ $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2i$

4. $a = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $a + a^2 + a^3 + \dots + a^{100}$ 의 값을 구하면?

- ① i ② $-i$ ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설

$$a = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$$a + a^2 + a^3 + a^4 = i - 1 - i + 1 = 0 \text{ 이고}$$

$$\therefore (a + a^2 + a^3 + a^4) + \dots + (a^{97} + a^{98} + a^{99} + a^{100}) = 0$$

5. 정수 n 에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$ 을 만족하는 z 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1 ,

$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i, i^n = -1$ 이면

$i^{-n} = -1, i^n = -i$ 이면

$i^{-n} = i, i^n = 1$ 이면

$i^{-n} = 1$

$\therefore i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$

$\therefore z$ 는 3개다.

6. $1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8} \\ &= \{1 + (-i) + (-1) + i\} + \{1 + (-i) + (-1) + i\} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

7. $(2-i)\bar{z} + 4iz = -1 + 4i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$z = a + bi \text{라 놓으면 } \bar{z} = a - bi$$

$$(2-i)(a-bi) + 4i(a+bi) = -1 + 4i$$

$$(2a-5b) + (3a-2b)i = -1 + 4i$$

$$\therefore 2a-5b = -1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$3a-2b = 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } a=2, b=1$$

$$\therefore z = 2 + i, \quad \bar{z} = 2 - i$$

$$\therefore z\bar{z} = (2+i)(2-i) = 2^2 - i^2 = 5$$

8. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, $(1 + 2i)z + 5(1 - \bar{z}) = 0$ 을 만족시키는 복소수 z 는?

① $1 + 3i$

② $1 - 3i$

③ $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

④ $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

⑤ $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 놓으면 $\bar{z} = a - bi$
따라서, 준식은 $(1 + 2i)(a + bi) + 5\{1 - (a - bi)i\} = 0$
 $\therefore a - 7b + 5 + (b - 3a)i = 0$
그런데, a, b 가 실수이므로
 $a - 7b + 5 = 0, b - 3a = 0$
이들을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$
 $\therefore z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

9. $A = \{x + yi | x^2 + y^2 = 2, x, y \text{는 실수}\}$ 이다.

$z = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}i$ (단, $a : \text{실수}$) 일 때, $\frac{1}{z} \in A$ 가 되는 복소수 z 는 2개가 있다. 이들의 곱을 구하면?

- ① $2i$ ② $-2i$ ③ $\frac{1}{2}i$ ④ $-\frac{1}{2}i$ ⑤ $\frac{3}{2}i$

해설

$$z = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}i = \frac{1+i}{2a}$$

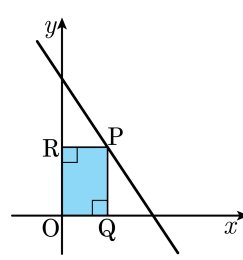
$$\frac{1}{z} = \frac{2a}{1+i} = a(1-i) = a - ai$$

$$a - ai \in A \text{이므로 } a^2 + a^2 = 2 \quad \therefore a = \pm 1$$

$$\therefore z = \frac{1+i}{2a} \text{에서 } z = \frac{1+i}{2}, -\frac{1+i}{2}$$

$$\therefore \text{이들의 곱은 } -\frac{i}{2}$$

10. 직선 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 이므로

점 P 의 좌표를 (a, b) 로 놓으면 $b = -\frac{3}{2}a + 3$

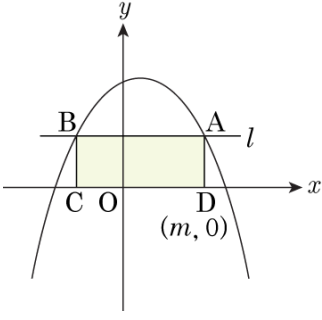
$$\begin{aligned}\square\text{OQPR} &= ab = a \left(-\frac{3}{2}a + 3 \right) \\ &= -\frac{3}{2}a^2 + 3a \\ &= -\frac{3}{2}(a-1)^2 + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$$a > 0, b = -\frac{3}{2}a + 3 > 0 \quad \therefore 0 < a < 2$$

따라서 $\square\text{OQPR}$ 의 넓이는 $a = 1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

11. $y = -x^2 + x + 6$ 의 그래프와 x 축에
 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B
 에서 x 축에 수선을 그려 그 수선의 발
 을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표
 를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레
 의 길이의 최댓값은? ($\frac{1}{2} < m < 3$)



- ① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10
 ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y = -x^2 + x + 6 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m, -m^2 + m + 6)$ 이다.

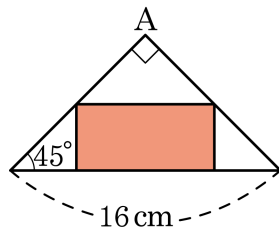
직사각형의 가로의 길이는 $2(m - \frac{1}{2})$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2 + m + 6$

$$\begin{aligned} (\square ABCD \text{ 둘레의 길이}) &= 2\{2(m - \frac{1}{2}) - m^2 + m + 6\} \\ &= 2(2m - 1 - m^2 + m + 6) \\ &= 2(-m^2 + 3m + 5) \\ &= -2(m - \frac{3}{2})^2 + \frac{29}{2} \end{aligned}$$

$m = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

12. 빗변의 길이가 16cm 인 직각이등변삼각형에 그림과 같이 직사각형을 그려 넣을 때, 그 넓이의 최댓값은?



- ① 16cm^2 ② 20cm^2 ③ 24cm^2
 ④ 28cm^2 ⑤ 32cm^2

해설

세로의 길이를 x , 넓이를 y 라 하면
 $y = (16 - 2x)x = 2(-x^2 + 8x)$
 $= -2(x^2 - 8x + 16 - 16)$
 $= -2(x - 4)^2 + 32$
 $x = 4$ 일 때 최댓값 32

13. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$ 의 값은?

① 15

② 16

③ 17

④ 18

⑤ 20

해설

근과 계수와의 관계로부터

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 1$$

$$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 27 - 9 = 18$$

14. 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$ 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계를 이용하면,

$$\alpha + \beta = -3 \quad \alpha\beta = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 &= \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \\ &= -3 + 2 = -1 \end{aligned}$$

15. 방정식 $x^2+3x+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$ 의 값은?

① -2 ② -4 ③ -8 ④ -14 ⑤ -17

해설

방정식 $x^2+3x+1=0$ 의 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2+3\alpha+1=0, \beta^2+3\beta+1=0$$

$$\alpha^2+1=-3\alpha, \beta^2+1=-3\beta$$

$$\therefore (\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$$

$$=(-3\alpha+5\alpha)(-3\beta-4\beta)$$

$$=-14\alpha\beta$$

근과 계수와의 관계에서 $\alpha\beta=1$ 이므로

$$(\text{주어진 식})=-14$$

16. $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, $\omega^{2012} + \omega^{2013} + \omega^{2014}$ 의 값은?

① 3

② -1

③ 1

④ 0

⑤ 2

해설

문제의 조건에서 ω 는

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 를 만족시키므로

윗식의 양변에 $\omega - 1$ 을 곱하면

$$\omega^3 - 1 = 0$$

$$\therefore \omega^3 = 1$$

$$\therefore \omega^{2012} + \omega^{2013} + \omega^{2014}$$

$$= (\omega^3)^{670} \cdot \omega^2 + (\omega^2)^{671} + (\omega^3)^{671} \cdot \omega$$

$$= \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

17. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^{50} + \omega^{51} + \omega^{52}$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 일때
 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ 에서
 $\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이 성립한다.
주어진 문제식을 ω^{50} 으로 묶으면
 $\omega^{50}(\omega^2 + \omega + 1)$ 이고
 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이므로 답은 0이다.

18. 방정식 $x^3 = 8$ 의 한 허근을 α 라 하고, $z = \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 2}$ 이라 할 때, $4z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 13

해설

$$\begin{aligned} x^3 &= 8 \text{에서 } (x-2)(x^2+2x+4) = 0 \\ x^2+2x+4 &= 0 \text{의 한 허근을 } \alpha \text{라 하면} \\ \text{다른 허근은 } \bar{\alpha} \text{이므로} \\ \alpha + \bar{\alpha} &= -2, \quad \alpha\bar{\alpha} = 4 \\ \therefore 4z\bar{z} &= 4 \times \frac{2\alpha+1}{\alpha+2} \times \frac{2\bar{\alpha}+1}{\bar{\alpha}+2} \\ &= 4 \times \frac{4\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha+\bar{\alpha}) + 1}{\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha+\bar{\alpha}) + 4} \\ &= 4 \times \frac{4 \times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13 \end{aligned}$$

19. 주말 연속극을 시작하기 전에 상품 광고를 하려고 한다. 광고에는 광고 시간이 20초인 것과 25초인 것 두 종류가 있고, 광고 내용이 바뀔 때마다 1초 동안의 간격을 둔다. 정확하게 4분 30초 동안에 11개의 상품을 광고하고 싶다면 광고 시간이 20초인 상품을 몇 개 광고해야 하는지 구하면?
- ① 1개 ② 3개 ③ 5개 ④ 7개 ⑤ 9개

해설

20초 광고의 개수를 x ,
25초 광고의 개수를 y 라 할 때
11개의 광고들 사이의 간격은 $10 \times 1(\text{초}) = 10(\text{초})$
총 4분 30초는 $60 \times 4 + 30 = 270(\text{초})$ 이다.
 $\therefore$ 광고에 사용되는 시간은 $270 - 10 = 260(\text{초})$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 20x + 25y = 260 \end{cases}$$

두 식을 연립하여 풀면, $x = 3, y = 8$
따라서 20초 광고는 3개이다.

20. 버스가 P 시와 Q 시 사이를 상, 하행 모두 같은 시간 간격으로 운행하고 있다. P 시에서 Q 시로 자전거를 타고 가는 사람이 어떤 곳에서 상, 하행버스를 동시에 만나고 6분 후에 P 시행의 버스를 만났고, 다시 6분이 지난 후에 Q 시행의 버스에 추월당했다. 버스의 속력이 일정할 때, 버스는 몇분 간격으로 운행되는가?

- ① 6분 ② 8분 ③ 10분 ④ 12분 ⑤ 14분

해설

버스의 속력을 a m/min, 자전거의 속력을 b m/min, 버스의 운행 간격을 t 분이라 하면

$$\begin{cases} 6a + 6b = at \\ 12a - 12b = at \end{cases}$$

$$\therefore a = 3b, t = 8$$

즉, 8분 간격으로 운행된다.

21. 어떤 공장에서 A , B 의 두 제품을 생산하고 있다. A 제품의 생산량은 작년에 비하여 20% 증가하였고, B 제품은 25% 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B 제품의 생산량을 구하면?
- ▶ 답 : 개
- ▷ 정답 : 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b 라고 하면,
올해는 각각 $1.2a, 1.25b$ 이다.
 $a + b = 70, 1.2a + 1.25b = 86$
연립하여 풀면, $a = 30, b = 40$