

1. 실수 a, b 에 대하여 $(a + b - 5)^2 + \sqrt{(ab + 3)^2} = 0$, $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 일 때, $a - b$ 의 값은?

① $-\sqrt{13}$

② $-\sqrt{37}$

③ $\sqrt{19}$

④ $\sqrt{13}$

⑤ $\sqrt{37}$

해설

$$(a + b - 5)^2 + \sqrt{(ab + 3)^2} = (a + b - 5)^2 + |ab + 3| = 0 \rightarrow \\ a + b = 5, ab = -3, (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 37 \\ a - b = \pm \sqrt{37} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \text{ 가 성립하려면, } a < 0 \text{ 그리고 } b \geq 0 \text{ 일 때이다.}$$

$$\therefore a - b < 0 \text{ 이므로 } \textcircled{1} \text{에서 } a - b = -\sqrt{37}$$

2. a, b 가 $-2, -1, 0, 1, 2$ 중 하나일 때, 등식 $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

① 4개

② 5개

③ 6개

④ 7개

⑤ 8개

해설

$$\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \text{ 를 만족시키는 조건은}$$

i) $a+b=0$ 이고 $a-b \neq 0$

ii) $a-b < 0$ 이고 $a+b > 0$

i)의 경우 $(-2, 2) (2, -2) (-1, 1) (1, -1)$

ii)의 경우 $(-1, 2) (0, 2) (0, 1) (1, 2)$

$\therefore$ 모두 8개

3. 다음 보기 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

$$\textcircled{\text{㉠}} \sqrt{-2} \sqrt{-5} = \sqrt{10}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \sqrt{-3} \sqrt{12} = -6$$

$$\textcircled{\text{㉢}} (-\sqrt{-2})^2 = -2$$

$$\textcircled{\text{㉣}} (\sqrt{-3})^3 = -3\sqrt{3}i$$

$$\textcircled{\text{㉤}} \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = -2i$$

$$\textcircled{\text{㉥}} \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = -2$$

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 5개

⑤ 6개

해설

㉢, ㉣, ㉤이 옳다.

$$\textcircled{\text{㉠}} \sqrt{-2} \sqrt{-5} = -\sqrt{10}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \sqrt{-3} \sqrt{12} = 6i$$

$$\textcircled{\text{㉥}} \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = 2i$$

4. $a = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $a + a^2 + a^3 + \dots + a^{100}$ 의 값을 구하면?

① i

② $-i$

③ -1

④ 1

⑤ 0

해설

$$a = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$$a + a^2 + a^3 + a^4 = i - 1 - i + 1 = 0 \text{ 이고}$$

$$\therefore (a + a^2 + a^3 + a^4) + \dots + (a^{97} + a^{98} + a^{99} + a^{100}) = 0$$

5. 정수 n 에 대해 $z = i^n + i^{-n}$, $i = \sqrt{-1}$ 을 만족하는 z 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1 ,

$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면

$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면

$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면

$i^{-n} = 1$

$\therefore i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$

$\therefore z$ 는 3개다.

6. $1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8} \\ &= \{1 + (-i) + (-1) + i\} + \{1 + (-i) + (-1) + i\} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

7. $(2-i)\bar{z} + 4iz = -1 + 4i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$z = a + bi$ 라 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

$$(2-i)(a-bi) + 4i(a+bi) = -1 + 4i$$

$$(2a-5b) + (3a-2b)i = -1 + 4i$$

$$\therefore 2a-5b = -1 \cdots \textcircled{\Gamma}$$

$$3a-2b = 4 \cdots \textcircled{\text{L}}$$

$\textcircled{\Gamma}$, $\textcircled{\text{L}}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 1$

$$\therefore z = 2 + i, \quad \bar{z} = 2 - i$$

$$\therefore z\bar{z} = (2+i)(2-i) = 2^2 - i^2 = 5$$

8. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, $(1 + 2i)z + 5(1 - \bar{z}) = 0$ 을 만족시키는 복소수 z 는?

① $1 + 3i$

② $1 - 3i$

③ $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

④ $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

⑤ $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

따라서, 준식은 $(1 + 2i)(a + bi) + 5\{1 - (a - bi)i\} = 0$

$$\therefore a - 7b + 5 + (b - 3a)i = 0$$

그런데, a, b 가 실수이므로

$$a - 7b + 5 = 0, b - 3a = 0$$

이들을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$

$$\therefore z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$$

9. $A = \{x + yi | x^2 + y^2 = 2, x, y \text{는 실수}\}$ 이다.

$z = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}i$ (단, $a : \text{실수}$) 일 때, $\frac{1}{z} \in A$ 가 되는 복소수 z 는 2개가 있다. 이들의 곱을 구하면?

① $2i$

② $-2i$

③ $\frac{1}{2}i$

④ $-\frac{1}{2}i$

⑤ $\frac{3}{2}i$

해설

$$z = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}i = \frac{1+i}{2a}$$

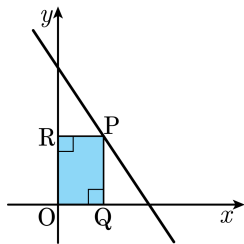
$$\frac{1}{z} = \frac{2a}{1+i} = a(1-i) = a - ai$$

$$a - ai \in A \Rightarrow \text{므로 } a^2 + a^2 = 2 \quad \therefore a = \pm 1$$

$$\therefore z = \frac{1+i}{2a} \text{에서 } z = \frac{1+i}{2}, -\frac{1+i}{2}$$

$$\therefore \text{이들의 곱은 } -\frac{i}{2}$$

10. 직선 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 이므로

점 P 의 좌표를 (a, b) 로 놓으면 $b = -\frac{3}{2}a + 3$

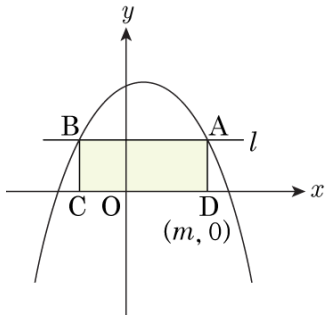
$$\begin{aligned}\square\text{OQPR} &= ab = a\left(-\frac{3}{2}a + 3\right) \\ &= -\frac{3}{2}a^2 + 3a \\ &= -\frac{3}{2}(a-1)^2 + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$$a > 0, b = -\frac{3}{2}a + 3 > 0 \quad \therefore 0 < a < 2$$

따라서 $\square\text{OQPR}$ 의 넓이는 $a = 1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

11. $y = -x^2 + x + 6$ 의 그래프와 x 축에
평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B
에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발
을 각각 D, C 라 하고, 점 D 의 x 좌표
를 m 이라고 할 때, $\square ABCD$ 의 둘레
의 길이의 최댓값은? ($\frac{1}{2} < m < 3$)



- ① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10
④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y = -x^2 + x + 6 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m, -m^2 + m + 6)$ 이다.

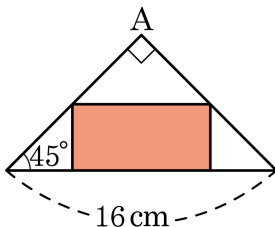
직사각형의 가로의 길이는 $2(m - \frac{1}{2})$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2 + m + 6$

$$\begin{aligned} (\square ABCD \text{ 둘레의 길이}) &= 2\{2(m - \frac{1}{2}) - m^2 + m + 6\} \\ &= 2(2m - 1 - m^2 + m + 6) \\ &= 2(-m^2 + 3m + 5) \\ &= -2(m - \frac{3}{2})^2 + \frac{29}{2} \end{aligned}$$

$m = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

12. 빗변의 길이가 16cm 인 직각이등변삼각형에 그림과 같이 직사각형을 그려 넣을 때, 그 넓이의 최댓값은?



① 16cm^2

② 20cm^2

③ 24cm^2

④ 28cm^2

⑤ 32cm^2

해설

세로의 길이를 x , 넓이를 y 라 하면

$$y = (16 - 2x)x = 2(-x^2 + 8x)$$

$$= -2(x^2 - 8x + 16 - 16)$$

$$= -2(x - 4)^2 + 32$$

$x = 4$ 일 때 최댓값 32

13. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$ 의 값은?

① 15

② 16

③ 17

④ 18

⑤ 20

해설

근과 계수와의 관계로부터

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= 27 - 9 = 18\end{aligned}$$

14. 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$ 의 값은?

① -5

② -4

③ -1

④ 1

⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계를 이용하면,

$$\alpha + \beta = -3 \quad \alpha\beta = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 &= \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \\ &= -3 + 2 = -1\end{aligned}$$

15. 방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\alpha^2 + 5\alpha + 1)(\beta^2 - 4\beta + 1)$ 의 값은?

① -2

② -4

③ -8

④ -14

⑤ -17

해설

방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0, \beta^2 + 3\beta + 1 = 0$$

$$\alpha^2 + 1 = -3\alpha, \beta^2 + 1 = -3\beta$$

$$\therefore (\alpha^2 + 5\alpha + 1)(\beta^2 - 4\beta + 1)$$

$$= (-3\alpha + 5\alpha)(-3\beta - 4\beta)$$

$$= -14\alpha\beta$$

근과 계수와의 관계에서 $\alpha\beta = 1$ 이므로

$$(\text{주어진 식}) = -14$$

16. $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, $\omega^{2012} + \omega^{2013} + \omega^{2014}$ 의 값은?

① 3

② -1

③ 1

④ 0

⑤ 2

해설

문제의 조건에서 ω 는

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 를 만족시키므로

윗식의 양변에 $\omega - 1$ 을 곱하면

$$\omega^3 - 1 = 0$$

$$\therefore \omega^3 = 1$$

$$\therefore \omega^{2012} + \omega^{2013} + \omega^{2014}$$

$$= (\omega^3)^{670} \cdot \omega^2 + (\omega^2)^{671} + (\omega^3)^{671} \cdot \omega$$

$$= \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

17. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^{50} + \omega^{51} + \omega^{52}$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 일때

$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ 에서

$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이 성립한다.

주어진 문제식을 ω^{50} 으로 묶으면

$\omega^{50}(\omega^2 + \omega + 1)$ 이고

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이므로 답은 0이다.

18. 방정식 $x^3 = 8$ 의 한 허근을 α 라 하고, $z = \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 2}$ 이라 할 때, $4z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 3

② 5

③ 7

④ 9

⑤ 13

해설

$$x^3 = 8 \text{에서 } (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 한 허근을 α 라 하면

다른 허근은 $\bar{\alpha}$ 이므로

$$\alpha + \bar{\alpha} = -2, \alpha\bar{\alpha} = 4$$

$$\therefore 4z\bar{z} = 4 \times \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 2} \times \frac{2\bar{\alpha} + 1}{\bar{\alpha} + 2}$$

$$= 4 \times \frac{4\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha + \bar{\alpha}) + 1}{\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha + \bar{\alpha}) + 4}$$

$$= 4 \times \frac{4 \times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13$$

19. 주말 연속극을 시작하기 전에 상품 광고를 하려고 한다. 광고에는 광고 시간이 20초인 것과 25초인 것 두 종류가 있고, 광고 내용이 바뀔 때마다 1초 동안의 간격을 둔다. 정확하게 4분 30초 동안에 11개의 상품을 광고하고 싶다면 광고 시간이 20초인 상품을 몇 개 광고해야 하는지 구하면?

① 1개

② 3개

③ 5개

④ 7개

⑤ 9개

해설

20초 광고의 개수를 x ,

25초 광고의 개수를 y 라 할 때

11개의 광고들 사이의 간격은 $10 \times 1(\text{초}) = 10(\text{초})$

총 4분 30초는 $60 \times 4 + 30 = 270(\text{초})$ 이다.

$\therefore$ 광고에 사용되는 시간은 $270 - 10 = 260(\text{초})$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 20x + 25y = 260 \end{cases}$$

두 식을 연립하여 풀면, $x = 3$, $y = 8$

따라서 20초 광고는 3개이다.

20. 버스가 P 시와 Q 시 사이를 상, 하행 모두 같은 시간 간격으로 운행하고 있다. P 시에서 Q 시로 자전거를 타고 가는 사람이 어떤 곳에서 상, 하행버스를 동시에 만나고 6분 후에 P 시행의 버스를 만났고, 다시 6분이 지난 후에 Q 시행의 버스에 추월당했다. 버스의 속력이 일정할 때, 버스는 몇분 간격으로 운행되는가?

① 6분

② 8분

③ 10분

④ 12분

⑤ 14분

해설

버스의 속력을 a m/min, 자전거의 속력을 b m/min, 버스의 운행 간격을 t 분이라 하면

$$\begin{cases} 6a + 6b = at \\ 12a - 12b = at \end{cases}$$

$$\therefore a = 3b, t = 8$$

즉, 8분 간격으로 운행된다.

21. 어떤 공장에서 A , B 의 두 제품을 생산하고 있다. A 제품의 생산량은 작년에 비하여 20% 증가하였고, B 제품은 25% 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B 제품의 생산량을 구하면?

▶ 답: 개

▷ 정답: 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a , b 라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$ 이다.

$$a + b = 70, 1.2a + 1.25b = 86$$

연립하여 풀면, $a = 30$, $b = 40$