1. k의 값에 관계없이 $(2k^2-3k)x-(k+2)y-(k^2-4)z=28$이 항상 성립하도록 x, y, z의 값을 정할 때, $3x+y+z$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 식을 k에 대해 정리하면

$(2x-z)k^2-(3x+y)k-(2y-4z+28)=0$

$\therefore\ 2x-z=0, 3x+y=0, 2y-4z+28=0$

$z=2x,\ y=-3x$ 을 $2y-4z+28=0$에 대입하면

$x=2,\ y=-6,\ z=4$

$\therefore\ 3x+y+z=4$

2. $y=kx^2+(1-2k)x+k-1$의 그래프는 k에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $\mathrm{B}(b,1)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 b의 값들의 합을 구하면?

① 1 ② 2 ③ -2 ④ -3 ⑤ -1

해설

(i) 준식을 k에 관하여 정리하면

$(x^2-2x+1)k+(x-y-1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립할 조건은

$x^2-2x+1=0,\ x-y-1=0$

$\therefore\ x=1,\ y=0$

$\therefore\ A(1,0)$

(ii) $\mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}(b,1)$에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

$b^2-2b=0,\quad b(b-2)=0 \quad \therefore\ b=0,\ 2$

$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

3. $\dfrac{2x+3a}{4x+2}$가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, a의 값을 구하면? $\left(단,\ x \neq -\dfrac{1}{2}\right)$

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+2} = k$ (일정)라 놓으면

$2x+3a = k(4x+2)$ 에서 $(2-4k)x + (3a-2k) = 0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$2-4k=0$, $3a-2k=0$

$\therefore\ k = \dfrac{1}{2}$ 이므로 $a = \dfrac{1}{3}$

4. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$이고 최소공배수가 x^3+x^2-2x일 때, 두 이차식의 합은?

① $2x^2-2x$ ② $2x^2+2x$ ③ $2x^2+x$

④ $2x^2-2$ ⑤ $2x^2+4$

해설

$A=Ga,\quad B=Gb(a,b$는 서로소$),\ L=Gab$

$\therefore\ G=(x-1),\quad L=(x-1)x(x+2)$

$$\begin{aligned} A+B=G(a+b) &= (x-1)(x+x+2) \\ &= (x-1)(2x+2) \\ &= 2(x^2-1) \end{aligned}$$

5. 두 이차 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 최대공약수가 $x+2$, 최소공배수가 x^3+2x^2-x-2일 때, $f(x)+g(x)$를 구하면?

① $2x^2+5x+2$ ② $2x^2+3x-2$ ③ $2x^2+4x$

④ $2x^2+2x-4$ ⑤ $2x^2+6x+4$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$

$f(x)=(x+1)(x+2)$, $g(x)=(x-1)(x+2)$ 또는 $f(x)=(x-1)(x+2)$, $g(x)=(x+1)(x+2)$

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= x^2+3x+2+x^2+x-2 \\ &= 2x^2+4x \end{aligned}$$

6. 이차항의 계수가 1 인 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3-3x+2 일 때, $A+B$ 는?

① $2x^2-x-1$　② $2x^2+x+1$　③ $2x^2-2x-1$
④ $2x^2-2x+1$　⑤ $2x^2-2x+3$

해설

$G=x-1,\ L=(x-1)^2(x+2)$
$A=(x-1)^2=x^2-2x+1,\ B=(x-1)(x+2)=x^2+x-2$
$A+B=2x^2-x-1$

7. 등식 $(x+1)(x-1)(x^3-x^2+x-1) = x^5-x^4+ax-b$가 항상 성립하도록 a, b값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x=1$을 대입하면, $0=a-b\cdots$ ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면, $0=-2-a-b\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $a=b=-1$

$\therefore\ a+b=-2$

8. x 의 값에 관계없이 등식 $x^2+13x-18=a(x+2)(x-3)+bx(x+2)+cx(x-3)$ 이 항상 성립할 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

준식에

$x=0$을 대입하면 $-18=-6a$에서 $a=3$

$x=3$을 대입하면 $30=15b$에서 $b=2$

$x=-2$을 대입하면 $-40=10c$에서 $c=-4$

$\therefore\ a+b+c=3+2+(-4)=1$

9. 등식 $3x^2+5x=a(x-1)^2+b(x+1)+c$가 x에 관한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

우변을 전개하여 계수비교법으로 미정계수를 구한다.

$$3x^2+5x=a(x-1)^2+b(x+1)+c$$
$$=ax^2+(-2a+b)x+a+b+c$$

$a=3,\ -2a+b=5,\ a+b+c=0$

$\therefore\ a=3,\ b=11,\ c=-14$

$\therefore\ a+b-c=28$

해설

수치대입법으로 미정계수를 구해도 된다.

양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a+b+c\cdots$㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$8=2b+c\cdots$㉡

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2=4a+c\cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면

$a=3,\ b=11,\ c=-14$

$\therefore\ a+b-c=28$

10. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2이고, $x+2$로 나눈 나머지가 5이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

나머지 정리에 의하여,

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$라 할 수 있다.

$f(1)=a+b=2$

$f(-2)=-2a+b=5$

연립하면, $a=-1 \quad b=3$

$\therefore R(x)=-x+3$

$R(2)=1$

11. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x+1, x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 각각 4, -18 이라고 한다. $f(x)$ 를 $(x+1)(x+2)$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $x+4$ ② $x-4$ ③ $22x+26$

④ $22x-26$ ⑤ $x-18$

해설

$f(-1)=4,\ f(-2)=-18$

$f(x)=(x+1)(x+2)Q(x)+ax+b$

$-a+b=4,\ \ -2a+b=-18$

$\therefore\ \ a=22,\ b=26$

12. 다항식 $f(x)$를 x^2-x로 나누면 3이 남고 x^2+x-6로 나누면 $x-1$이 남을 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ -2　⑤ -3

해설

$f(x)=x(x-1)Q_1(x)+3$

$f(x)=(x-2)(x+3)Q_2(x)+x-1$

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$f(1)=3,\ f(2)=1$ 이므로

$a+b=3,\ 2a+b=1$

연립하여 풀면, $a=-2,\ b=5$

$\therefore$(구하는 나머지)$R(x)=-2x+5$

$\therefore\ R(1)=3$

13. 두 다항식 A, B의 최대공약수를 $A\bigstar B$, 최소공배수를 $A\triangle B$라고 하자. 서로소인 두 다항 A, B식에 대하여 $\dfrac{A\triangle B}{AB\bigstar B^2}$를 간단히 한 것은?

① A　　② B　　③ AB　　④ A^2　　⑤ B^2

해설

다항식 A, B가 서로소이므로 $AB\bigstar B^2=B$, $A\triangle B=A\times B$

$\therefore \dfrac{A\triangle B}{AB\bigstar B^2}=\dfrac{A\times B}{B}=A$

14. 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B에 대하여 A, B의 최대공약수를 $(A,\ B)$, A, B의 최소공배수를 $[A,\ B]$라 하자. 다항식 A, B가

$$\boxed{(A+B,\ A-B)=2x-3,\ [A+B,\ A-B]=2x^2+x-6}$$

을 만족할 때, $2[A,\ B]=0$과 같은 해를 갖는 것은?

① $2x^3+5x^2-6x-9$ ② x^3+4x^2-2x-7
③ x^3-3x^2+5x-1 ④ $3x^3-x^2+2x-1$
⑤ $-x^3+2x^2-5x+7$

해설

$A=aG,\ B=bG\ (a,b$는 서로소$)$라 하자.
$(A+B,A-B)=((a+b)G,\ (a-b)G)=2x-3$ 이므로
G는 $2x-3$
따라서 A,B는 $2x-3$으로 나누어떨어지고 a, b는 일차식이다.
또 $[A+B,A-B]=[(a+b)G,(a-b)G]=2x^2+x-6$
$=(x+2)(2x-3)$ 이므로 $(a+b)(a-b)G=(x+2)(2x-3)$
$\therefore\ (a+b)(a-b)=x+2$ 이고
a, b는 모두 일차식이므로
$a+b=x+2$, $a-b=1$ 이라 하고 연립하여 풀면
$a=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$,
$b=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
$\therefore\ [A,B]=\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)(2x-3)$
$=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right)(2x-3)$
$=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{8}{4}x^2-3x+\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$
$=\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$
$\therefore\ 2[A,B]=x^3+\frac{5}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}$
따라서 $2[A,B]$와 같은 것은 ① $2x^3+5x^2-6x-9$ 이다.

15. 두 다항식 A, B의 최대공약수를 $A\bigstar B$라 할 때 $\dfrac{AB\bigstar B^2}{A\bigstar B}$를 간단히 하면?

① A ② B ③ AB ④ A^2 ⑤ B^2

해설

$A\bigstar B=G$라 하면, $A=aG, B=bG$이고, a, b는 서로소이다.

$$\frac{AB\bigstar B^2}{A\bigstar B}=\frac{abG^2\bigstar b^2G^2}{G}=\frac{bG^2}{G}=bG=B$$

16. 다항식 x^3-2x^2+mx-4를 $x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$이고 몫 $Q(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -5이다. 이때, m의 값을 구하면?

① 6 ② 4 ③ 0 ④ -1 ⑤ -6

해설

$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+R$이라 하자.

$x=1$을 대입하면 $R=m-5$

$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+m-5\cdots$①

$Q(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -5이므로

$Q(-1)=-5$

①식에 $x=-1$을 대입하면

$-1-2-m-4=-2Q(-1)+m-5$

$-2m=12$

$\therefore\ m=-6$

해설

조립제법을 사용하면

$$\begin{array}{r|rrrl}
1 & 1 & -2 & m & -4 \\
 & & 1 & -1 & m-1 \\ \hline
-1 & 1 & -1 & m-1 & \boxed{m-5} \\
 & & -1 & 2 & \\ \hline
 & 1 & -2 & \boxed{m+1} &
\end{array}$$

$m+1=-5$ $\therefore\ m=-6$

17. 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -2이다. $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = (x-3)Q(x) + 1$

$Q(2) = -2$

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 $f(2)$이다.

$$\begin{aligned} f(2) &= (2-3)Q(2) + 1 \\ &= -1 \times (-2) + 1 = 3 \end{aligned}$$

18. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$를 다시 $x+3$으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는?

① 10　　② -10　　③ 9　　④ -9　　⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는 $f(-3)$이다.
$f(x)=(x-2)Q(x)+5$에서
$x=-3$을 대입하면 $f(-3)=(-3-2)Q(-3)+5$
$Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3)=3$
$\therefore\ f(-3)=-10$

19. 두 이차식의 합이 $2x^2 - x - 6$이고, 최소공배수가 $x^3 + x^2 - 4x - 4$일 때, 두 이차식의 최대공약수는?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$ ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

해설

최대공약수는 합과 최소공배수의 공통인수

$2x^2 - x - 6 = (x-2)(2x+3)$

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x-2)(x+2)(x+1)$

20. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최소공배수가 x^3+6x^2-x-30이고, 최대공약수가 $x-2$일 때, 두 다항식의 합을 바르게 구한 것은?

① $2x^2+4x-16$ ② $2x^2+3x-8$ ③ x^2-5x-1

④ $2x^2+x+4$ ⑤ x^2+2x+5

해설

두 이차 다항식을 $A=a(x-2)$, $B=b(x-2)$ (a, b 는 서로소) 라고 하면

$L=x^3+6x^2-x-30=abG=ab(x-2)$ 이고,

L 을 인수분해하면

$L=(x-2)(x^2+8x+15)=$

$\underbrace{(x-2)}_{G}\underbrace{(x+3)(x+5)}_{ab}$

따라서, 두 다항식은

$(x-2)(x+3)=x^2+x-6$

$(x-2)(x+5)=x^2+3x-10$ 이므로

두 다항식의 합은

$(x^2+x-6)+(x^2+3x-10)=2x^2+4x-16$

21. 두 다항식 x^2-x+p 와 $x^3+x^2+x+p+3$ 이 사차식의 최소공배수를 갖도록 p 의 값을 정하면?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

다항식 $A,\ B$ 의 최소공배수 L , 최대공약수를 G 라 하면

$AB=GL$ 에서 G 는 1 차식이다. ($\because$ AB는 5차식, G는 4차식)

$\therefore$ 　최대공약수는 $x+1$, $x+1$은 x^2-x+p 의 약수이므로

$2+p=0$

$\therefore\ p=-2$