1. $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$를 인수분해 하였을 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a-b$　　② $b-c$　　③ $c-a$

④ $a+b+c$　　⑤ $ab+bc+ca$

해설

문자가 여러 개일 경우 동차식이면 어느 한 문자에 대하여 정리하고
차수가 다르면 차수가 낮은 문자에 대해 정리한다.

$\therefore$ (준식) $= a^3b^2-a^2b^3+b^3c^2-b^2c^3+c^3a^2-c^2a^3$

$= (b^2-c^2)a^3-(b^3-c^3)a^2+b^2c^2(b-c)$

$= (b-c)\{(b+c)a^3-(b^2+bc+c^2)a^2+b^2c^2\}$

$= (b-c)\{(c^2-a^2)b^2-a^2(c-a)b-a^2c(c-a)\}$

$= (b-c)(c-a)\{(c+a)b^2-a^2b-a^2c\}$

$= (b-c)(c-a)\{(b^2-a^2)c+ab(b-a)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)\{(b+a)c+ab\}$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

2. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \text{ (단, } a \neq b \neq c)$$

① -1 ② 1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 5

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준 식}) &= \frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= \frac{(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1
\end{aligned}
$$

3. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ 을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$ ② $(a-b)(b-c)(a-c)$
③ $-(b-a)(b-c)(c-a)$ ④ $(a-b)(b-c)(c-a)$
⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (c-b)a^2+(b^2-c^2)a+bc(c-b)\\ &= (c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}\\ &= (c-b)(a-b)(a-c)\\ &= (a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

4. 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x+2$ 이고 최소공배수가 x^3+2x^2+ax+6 일 때, 상수 a 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

최대공약수 $G = x+2$
최소공배수는 G를 인수로 가지므로
$x = -2$를 최소공배수에 대입하면 0이 된다.
$x^3 + 2x^2 + ax + 6$
$= (-2)^3 + 2(-2)^2 + a(-2) + 6$
$= -8 + 8 - 2a + 6$
$= -2a + 6 = 0$
$\therefore\ a = 3$

5. 두 다항식 $x^2 + ax - 2$, $x^2 - 5x + b$의 최대공약수가 $x - 2$일 때, $a + b$의 값은?

① -5 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

각 식에 $x = 2$을 대입하면 0이 된다.

i) $x^2 + ax - 2$에 $x = 2$를 대입하면

$4 + 2a - 2 = 0$ $\therefore$ $a = -1$

ii) $x^2 - 5x + b$에 $x = 2$를 대입하면

$4 - 10 + b = 0$ $\therefore$ $b = 6$

$\therefore$ $a + b = -1 + 6 = 5$

6. 최대공약수가 $x+1$ 인 두 다항식 x^2+3x+a, x^2+ax-b 의 최소공배수를 $L(x)$ 라 할 때, $L(1)$ 의 값은?

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

해설

최대공약수가 $x+1$ 이므로
두 다항식에 $x=-1$ 을 대입하면 0 이 된다.
$1-3+a=0 \therefore a=2$
$1-a-b=0 \quad \therefore b=-1$
따라서 두 다항식은 각각
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$
$x^2+2x+1=(x+1)^2$
최소공배수 $L(x)$ 는 $(x+1)^2(x+2)$
$\therefore L(1)=(1+1)^2(1+2)=12$

7. $1 < x < 3$인 x에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$의 해를 구하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2　　② $1+\sqrt{2}$　　③ $1+\sqrt{3}$
④ $\sqrt{5}-1$　　⑤ $2\sqrt{2}-1$

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$
준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x-2)(x+1) = 0$
$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$
그런데 $1 < x < 2$이므로 만족하는 해가 없다.
(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$
준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$
그런데 $2 \le x < 3$이므로 만족하는 해는
$x = 1 + \sqrt{3}$

8. $1 < x < 4$일 때, 방정식 $x^2 + [x] = 4x$의 근의 개수는?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로
$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{3}$
이것은 모두 $1 < x < 2$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$이므로
$x^2 - 4x + 2 = 0, \ \therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$
이것은 모두 $2 \le x < 3$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(iii) $3 \le x < 4$일 때, $[x] = 3$이므로
$x^2 - 4x + 3 = 0, \ (x-1)(x-3) = 0$
$\therefore x = 1$ 또는 3
그런데 $3 \le x < 4$를 만족하는 것은 $x = 3$
따라서 주어진 식의 근은 1개이다.

9. 방정식 $x^2-[x]-4=0$ $(0<x<4)$의 모든 근의 합은?

① $2\sqrt{6}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 3 ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

이차방정식 $x^2-[x]-4=0$에서
(ⅰ) $0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로
$x^2-4=0, (x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$
그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.
(ⅱ) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로
$x^2-5=0,\ (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$
$\therefore x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{5}$
그런데 $1\le x<2$이므로 해가 없다.
(ⅲ) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로
$x^2-6=0,\ (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})=0$
$\therefore x=-\sqrt{6}$ 또는 $x=\sqrt{6}$
그런데 $2\le x<3$이므로 $x=\sqrt{6}$
(ⅳ) $3\le x<4$일 때, $[x]=3$이므로
$x^2-7=0,\ (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})=0$
$\therefore x=-\sqrt{7}$ 또는 $x=\sqrt{7}$
그런데 $3\le x<4$이므로 해가 없다.
따라서 모든 근의 합은 $\sqrt{6}$

10. x, y 에 대한 이차식 $2x^2+xy-y^2-x+2y+k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$2x^2+xy-y^2-x+2y+k$를 x 에 대해 정리하면
$2x^2+(y-1)x-y^2+2y+k$
이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D=(y-1)^2-4x2(-y^2+2y+k)$
$\quad=9y^2-18y-8k+1$
이 식이 완전제곱식이므로
$\frac{D'}{4}=9^2+9(-8k+1)$
$\therefore k=-1$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여
$(2x-y+a)(x+y+b)$ 로 나타낼 수 있다.
전개하면, $2x^2+xy-y^2+(a+2b)x+(a-b)y+ab$ 이고
문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{rl} & a+2b=-1 \\ -) & a-\ \ b=2 \\ \hline & 3b=-3 \end{array}$$

$\therefore a=1,\quad b=-1$
$\therefore k=ab=-1$

11. 이차식 $x^2-xy-2y^2-ax-3y-1$ 이 $x,\ y$ 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

해설

(주어진 식)$=0$이라 놓고 x에 관하여 정리하면

$x^2-(a+y)x-(2y^2+3y+1)=0$

근의 공식에서

$$x=\frac{a+y\pm\sqrt{(a+y)^2+4(2y^2+3y+1)}}{2}$$

$$=\frac{a+y\pm\sqrt{9y^2+2(a+6)y+a^2+4}}{2}$$

주어진 식이 $x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식$(=D)$ 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D=9y^2+2(a+6)y+a^2+4$의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4}=(a+6)^2-9(a^2+4)=-8a^2+12a=0$$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

12. $x^2+xy+ay^2+x+y-2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2+xy+ay^2+x+y-2$

$=x^2+(y+1)x+ay^2+y-2$가

x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$D=(y+1)^2-4(ay^2+y-2)$

$=y^2+2y+1-4ay^2-4y+8$

$=(1-4a)y^2-2y+9$에서

$\frac{D}{4}=1-9(1-4a)=0$

$\therefore\ 1-9+36a=0$

$\therefore\ a=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$