

1. $a^2b^2(a-b) + b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a)$ 를 인수분해 하였을 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a-b$

② $b-c$

③ $c-a$

④ $a+b+c$

⑤ $ab+bc+ca$

해설

문자가 여러 개일 경우 동차식이면 어느 한 문자에 대하여 정리하고

차수가 다르면 차수가 낮은 문자에 대해 정리한다.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= a^3b^2 - a^2b^3 + b^3c^2 - b^2c^3 + c^3a^2 - c^2a^3 \\ &= (b^2 - c^2)a^3 - (b^3 - c^3)a^2 + b^2c^2(b - c) \\ &= (b - c)\{(b + c)a^3 - (b^2 + bc + c^2)a^2 + b^2c^2\} \\ &= (b - c)\{(c^2 - a^2)b^2 - a^2(c - a)b - a^2c(c - a)\} \\ &= (b - c)(c - a)\{(c + a)b^2 - a^2b - a^2c\} \\ &= (b - c)(c - a)\{(b^2 - a^2)c + ab(b - a)\} \\ &= (b - c)(c - a)(b - a)\{(b + a)c + ab\} \\ &= -(a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

2. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \quad (\text{단, } a \neq b \neq c)$$

① -1

② 1

③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)a^2 - (c^2 - b^2)a + bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1 \end{aligned}$$

3. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$ 을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$

② $(a-b)(b-c)(a-c)$

③ $-(b-a)(b-c)(c-a)$

④ $(a-b)(b-c)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (c-b)a^2 + (b^2 - c^2)a + bc(c-b) \\&= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\} \\&= (c-b)(a-b)(a-c) \\&= (a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

4. 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x + 2$ 이고 최소공배수가 $x^3 + 2x^2 + ax + 6$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① 0

② 1

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

최대공약수 $G = x + 2$

최소공배수는 G 를 인수로 가지므로

$x = -2$ 를 최소공배수에 대입하면 0 이 된다.

$$x^3 + 2x^2 + ax + 6$$

$$= (-2)^3 + 2(-2)^2 + a(-2) + 6$$

$$= -8 + 8 - 2a + 6$$

$$= -2a + 6 = 0$$

$$\therefore a = 3$$

5. 두 다항식 $x^2 + ax - 2$, $x^2 - 5x + b$ 의 최대공약수가 $x - 2$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 5

해설

각 식에 $x = 2$ 을 대입하면 0이 된다.

i) $x^2 + ax - 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$$4 + 2a - 2 = 0 \therefore a = -1$$

ii) $x^2 - 5x + b$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$$4 - 10 + b = 0 \therefore b = 6$$

$$\therefore a + b = -1 + 6 = 5$$

6. 최대공약수가 $x + 1$ 인 두 다항식 $x^2 + 3x + a$, $x^2 + ax - b$ 의 최소공배수를 $L(x)$ 라 할 때, $L(1)$ 의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

최대공약수가 $x + 1$ 이므로

두 다항식에 $x = -1$ 을 대입하면 0 이 된다.

$$1 - 3 + a = 0 \therefore a = 2$$

$$1 - a - b = 0 \therefore b = -1$$

따라서 두 다항식은 각각

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

최소공배수 $L(x)$ 는 $(x + 1)^2(x + 2)$

$$\therefore L(1) = (1 + 1)^2(1 + 2) = 12$$

7. $1 < x < 3$ 인 x 에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$ 의 해를 구하여라.
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2

② $1 + \sqrt{2}$

③ $1 + \sqrt{3}$

④ $\sqrt{5} - 1$

⑤ $2\sqrt{2} - 1$

해설

(i) $1 < x < 2$ 일 때, $[x] = 1$

준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x - 2)(x + 1) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$

그런데 $1 < x < 2$ 이므로 만족하는 해가 없다.

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $[x] = 2$

준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$

그런데 $2 \leq x < 3$ 이므로 만족하는 해는

$x = 1 + \sqrt{3}$

8. $1 < x < 4$ 일 때, 방정식 $x^2 + [x] = 4x$ 의 근의 개수는?(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

(i) $1 < x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{3}$$

이것은 모두 $1 < x < 2$ 를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $[x] = 2$ 이므로

$$x^2 - 4x + 2 = 0, \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$$

이것은 모두 $2 \leq x < 3$ 를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.

(iii) $3 \leq x < 4$ 일 때, $[x] = 3$ 이므로

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad (x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } 3$$

그런데 $3 \leq x < 4$ 를 만족하는 것은 $x = 3$
따라서 주어진 식의 근은 1개이다.

9. 방정식 $x^2 - [x] - 4 = 0$ ($0 < x < 4$)의 모든 근의 합은?

① $2\sqrt{6}$

② $\sqrt{10}$

③ 3

④ $\sqrt{7}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

이차방정식 $x^2 - [x] - 4 = 0$ 에서

(i) $0 < x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로

$$x^2 - 4 = 0, (x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 없다.

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로

$$x^2 - 5 = 0, (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{5} \text{ 또는 } x = \sqrt{5}$$

그런데 $1 \leq x < 2$ 이므로 해가 없다.

(iii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $[x] = 2$ 이므로

$$x^2 - 6 = 0, (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6}) = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{6} \text{ 또는 } x = \sqrt{6}$$

그런데 $2 \leq x < 3$ 이므로 $x = \sqrt{6}$

(iv) $3 \leq x < 4$ 일 때, $[x] = 3$ 이므로

$$x^2 - 7 = 0, (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{7} \text{ 또는 } x = \sqrt{7}$$

그런데 $3 \leq x < 4$ 이므로 해가 없다.

따라서 모든 근의 합은 $\sqrt{6}$

10. x, y 에 대한 이차식 $2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 를 x 에 대해 정리하면

$$2x^2 + (y-1)x - y^2 + 2y + k$$

이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면

판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (y-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-y^2 + 2y + k)$$

$$= 9y^2 - 18y - 8k + 1$$

이 식이 완전제곱식이므로

$$\frac{D'}{4} = 9^2 + 9(-8k + 1)$$

$$\therefore k = -1$$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여

$(2x - y + a)(x + y + b)$ 로 나타낼 수 있다.

전개하면, $2x^2 + xy - y^2 + (a + 2b)x + (a - b)y + ab$ 이고

문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{r} a+2b=-1 \\ -) a-b=2 \\ \hline 3b=-3 \end{array}$$

$$\therefore a = 1, b = -1$$

$$\therefore k = ab = -1$$

11. 이차식 $x^2 - xy - 2y^2 - ax - 3y - 1$ 이 x, y 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1

② $\frac{3}{2}$

③ 2

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

해설

(주어진 식) = 0이라 놓고 x 에 관하여 정리하면

$$x^2 - (a + y)x - (2y^2 + 3y + 1) = 0$$

근의 공식에서

$$\begin{aligned} x &= \frac{a + y \pm \sqrt{(a + y)^2 + 4(2y^2 + 3y + 1)}}{2} \\ &= \frac{a + y \pm \sqrt{9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

주어진 식이 x, y 에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식(= D) 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D = 9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4$ 의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4} = (a + 6)^2 - 9(a^2 + 4) = -8a^2 + 12a = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

12. $x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{4}{9}$

④ $\frac{5}{9}$

⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$$x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$$

$$= x^2 + (y+1)x + ay^2 + y - 2$$

x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$$D = (y+1)^2 - 4(ay^2 + y - 2)$$

$$= y^2 + 2y + 1 - 4ay^2 - 4y + 8$$

$$= (1-4a)y^2 - 2y + 9 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 9(1-4a) = 0$$

$$\therefore 1 - 9 + 36a = 0$$

$$\therefore a = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$