1. 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여, $(x+y)a^2+(x-y)b=4x+y$가 성립할 때, a^2+b^2의 값은?

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{17}{4}$ ④ $\frac{19}{4}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

해설

$(a^2+b)x+(a^2-b)y=4x+y$

$a^2+b=4\cdots①$, $a^2-b=1\cdots②$

①, ②에서 $a^2=\frac{5}{2},\ b=\frac{3}{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=\frac{19}{4}$

2. $(x+y)a-(x-y)b-(y-z)c-4z=0$이 $x,\ y,\ z$의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc를 구하면?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

x, y, z에 대해 정리하면

$(a-b)x+(a+b-c)y+(c-4)z=0$

$x,\ y,\ z$에 대한 항등식이므로

$a=b,\ a+b-c=0,\ c=4$

$\therefore\ a=b=2,\ c=4$

$\therefore\ abc=16$

3. 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $(a,\ b,\ c) = ab + bc$로 정의한다. 이때, 등식 $(x,\ a,\ y) - (2x,\ b,\ y) = (x,\ 2,\ y)$이 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 성립하도록 $a,\ b$의 값을 정하면?

① $a = 1,\ b = 2$　② $a = 2,\ b = 2$　③ $a = 2,\ b = 0$

④ $a = 0,\ b = 2$　⑤ $a = 0,\ b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면

$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$

이 식을 $x,\ y$에 대하여 정리하면

$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$

이 등식이 임의의 $x,\ y$에 대하여 성립하므로

$a - 2b - 2 = 0,\ a - b - 2 = 0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2,\ b = 0$

4. 다항식 $x^{51}+30$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 이때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+R$ 이라 하면
$x=-1$을 대입하면 $R=29$
$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+29$
$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는
$Q(1)$, $x=1$ 식에 대입
$31=2Q(1)+29$
$\therefore\ Q(1)=1$

5. 다항식 $2x^{30}+2x^{28}-x$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$2x^{30}+2x^{28}-x=(x+1)Q(x)+R$
양변에 $x=-1$을 대입 하면,
$2+2+1=R \therefore\ R=5$
양변에 $x=1$을 대입 하면,
$2+2-1=2Q(1)+5$
$\therefore\ Q(1)=-1$

6. 다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누면 $3x+2$가 남고, 그 몫을 $x-1$로 나누면 2가 남는다. 이 다항식 $f(x)$를 x^3-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\frac{1}{2}R(2)$의 값을 구하면?

① 41　② 31　③ 21　④ 11　⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)Q(x)+3x+2 \\ &= (x^2+x+1)\{(x-1)p(x)+2\}+3x+2 \\ &= (x^3-1)p(x)+2x^2+5x+4 \end{aligned}$$

$\therefore R(x) = 2x^2+5x+4$

$\therefore \frac{1}{2}R(2) = 11$

7. 두 다항식 x^2+3x+a, x^2-3x+b 의 최대공약수가 $x-1$ 일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$ 라 하자. $f(0)$ 의 값을 구하면?

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

해설

$x-1$ 이 최대 공약수라면 두 식에
$x=1$ 을 대입하면 0 이 된다.
$A : x^2+3x+a$ 에 $x=1$ 을 대입하면
$1+3+a=0 \quad \therefore a=-4$
$B : x^2-3x+b$ 에 $x=1$ 을 대입하면
$1-3+b=0 \quad \therefore b=2$
$A : x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$
$B : x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$
최소공배수 $f(x)=(x-1)(x+4)(x-2)$ 가 된다.
$f(0)=(-1)\cdot(4)\cdot(-2)=8$

8. 두 다항식 x^2+ax+b, $x^2+3bx+2a$의 최대공약수가 $x-1$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ −1 ⑤ −2

해설

최대공약수가 $x-1$이므로
x^2+ax+b와 $x^2+3bx+2a$는
모두 $x-1$로 나누어 떨어져야 한다.
$\therefore\ 1+a+b=0$이고 $1+3b+2a=0$
따라서, $a=-2,\ b=1$
$\therefore\ a+b=-1$

9. 세 개의 다항식 $x^3+ax+b,\ x^3+cx^2+a,\ cx^2+bx+4,$ 의 공약수 중 하나가 $x-1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2　　② -2　　③ 3　　④ -3　　⑤ 4

해설

$f(x)=x^3+ax+b \rightarrow\ f(1)=1+a+b=0\cdots$㉠
$g(x)=x^3+cx^2+a \rightarrow\ g(1)=1+c+a=0\cdots$㉡
$h(x)=cx^2+bx+4 \rightarrow\ h(1)=c+b+4=0\cdots$㉢
㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(a+b+c)+6=0$
$\therefore\ a+b+c=-3$

10. 이차방정식 $2[x]^2+3[x]+1=0$의 해를 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-1 \le x < 0$　　② $-1 \le x < 1$　　③ $-1 \le x < 2$

④ $0 \le x < 1$　　⑤ $0 \le x < 2$

해설

$2[x]^2+3[x]+1=([x]+1)(2[x]+1)=0$이므로

$[x]=-1$ 또는 $[x]=-\frac{1}{2}$

그런데 $[x]$은 정수이므로 $[x]=-1$

$\therefore -1 \le x < 0$

11. $1 < x < 3$인 x에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$의 해를 구하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2　　② $1 + \sqrt{2}$　　③ $1 + \sqrt{3}$
④ $\sqrt{5} - 1$　　⑤ $2\sqrt{2} - 1$

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$
준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x-2)(x+1) = 0$
$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$
그런데 $1 < x < 2$이므로 만족하는 해가 없다.
(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$
준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$
그런데 $2 \le x < 3$이므로 만족하는 해는
$x = 1 + \sqrt{3}$

12. 방정식 $\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x-\frac{1}{2}\right]-7=0$의 해 $a \le x < b$ 또는 $c \le x < d$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\left[x-\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{2}\right]-1$이므로

$\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x+\frac{1}{2}\right]-4=0$

$\left[x+\frac{1}{2}\right]=4$ 또는 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=-1$이므로

$\frac{7}{2} \le x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \le x < -\frac{1}{2}$이다

따라서 구하는 값은

$\therefore a+b+c+d=6$

13. $x^2+xy+ay^2+x+y-2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2+xy+ay^2+x+y-2$
$=x^2+(y+1)x+ay^2+y-2$ 가
x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면
$D=(y+1)^2-4(ay^2+y-2)$
$=y^2+2y+1-4ay^2-4y+8$
$=(1-4a)y^2-2y+9$ 에서
$\frac{D}{4}=1-9(1-4a)=0$
$\therefore\ 1-9+36a=0$
$\therefore\ a=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

14. $x^2-xy-6y^2+x+7y+k$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 상수 k의 값을 정하면?

① -2 ② -4 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

x에 관해 식을 정리하면
$f(x)=x^2+(1-y)x+(-6y^2+7y+k)$
$f(x)$가 두개의 일차식으로 인수분해 되려면
$D=(1-y)^2-4(-6y^2+7y+k)$가 완전제곱식이어야 한다.
$D=25y^2-30y+(1-4k)$에서
$\frac{D}{4}=(-15)^2-25(1-4k)=0$
$\therefore\ k=-2$

15. $x,\ y$ 에 대한 이차식 $f(x,\ y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 $x,\ y$ 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 1　　⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면
근의 공식에 의하여
$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$
$\quad = -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4}$ $\cdots\cdots$ ㉠
한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이면
$x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이고
준식이 $x,\ y$ 의 일차식으로 인수분해되므로
x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y + 4$가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.
따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.
$\therefore\ D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$
$2 + k = 0$
$\therefore\ k = -2$