1. 다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누면 $3x+2$가 남고, 그 몫을 $x-1$로 나누면 2가 남는다. 이 다항식 $f(x)$를 x^3-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\frac{1}{2}R(2)$의 값을 구하면?

① 41　② 31　③ 21　④ 11　⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)Q(x)+3x+2 \\ &= (x^2+x+1)\{(x-1)p(x)+2\}+3x+2 \\ &= (x^3-1)p(x)+2x^2+5x+4 \end{aligned}$$

$\therefore R(x) = 2x^2+5x+4$

$\therefore \frac{1}{2}R(2) = 11$

2. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$를 다시 $x+3$으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는?

① 10 ② -10 ③ 9 ④ -9 ⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는 $f(-3)$이다.
$f(x)=(x-2)Q(x)+5$에서
$x=-3$을 대입하면 $f(-3)=(-3-2)Q(-3)+5$
$Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3)=3$
$\therefore\ f(-3)=-10$

3. 다항식 $x^{51}+30$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 이때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+R$ 이라 하면

$x=-1$을 대입하면 $R=29$

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+29$

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$Q(1)$, $x=1$ 식에 대입

$31=2Q(1)+29$

$\therefore \ Q(1)=1$

4. 두 다항식 $x^2-4x+3a+b$와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

해설

$f(x)=x^2-4x+3a+b$,
$g(x)=x^2+bx-6$이라 하면
$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)=g(2)=0$에서
$f(2)=4-8+3a+b=0,\ g(2)=4+2b-6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1\ \therefore\ a+b=2$

5. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 2, B = x^3 - x^2 - ax + 4$의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a의 값은?

① 2　　② 1　　③ 0　　④ -1　　⑤ -2

해설

최대공약수를 $x - \alpha$라 하자.

나머지정리에 의해 $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$

$\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$

두 식을 더하면 $2\alpha^3 = -2, \quad \alpha = -1$

이제 $\alpha = -1$ 을 다시 A식에 대입하면

$-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -2$

6. x에 관한 3차식 $x^3+px^2-q^2$, $x^3-(3q-p)x+2(q-1)$의 최대공약수가 $x-1$일 때, pq의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=x^3+px^2-q^2$,

$g(x)=x^3-(3q-p)x+2(q-1)$라 놓으면

최대공약수가 $x-1$이므로

$f(1)=1+p-q^2=0 \cdots$ ㉠

$g(1)=1-(3q-p)+2(q-1)=0$에서

$p-q-1=0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $q^2-q-2=0$, $(q-2)(q+1)=0$

(i) $q=2$일 때, ㉡ $p=3$

$f(x)=(x-1)(x+2)^2$, $g(x)=(x-1)^2(x+2)$

$\therefore$ $G.C.D$가 $x-1$이라는 것에 모순

(ii) $q=-1$일 때, ㉡ $p=0$

$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$,

$g(x)=(x-1)(x^2+x+4)$

$\therefore$ $G.C.D$는 $x-1$

$\therefore$ $pq=0$

7. $0 < x < 2$일 때, 방정식 $2x^2 - x - 3[x] = 0$의 모든 해의 합은?(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$2x^2 - x - 3[x] = 0$에서 $0 < x < 2$이므로

(i) $0 < x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로

$2x^2 - x = 0, x(2x - 1) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = \frac{1}{2}$

그런데 $0 < x < 1$이므로 $x = \frac{1}{2}$

(ii) $1 \leq x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로

$2x^2 - x - 3 = 0,\ (x + 1)(2x - 3) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $\frac{3}{2}$

그런데 $1 \leq x < 2$이므로 $x = \frac{3}{2}$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

8. 방정식 $2[x]^2 - [x] - 1 = 0$의 해를 $a \le x < b$라 할 때, $2a+b$의 값을 구하면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2[x]^2 - [x] - 1 = (2[x]+1)([x]-1) = 0$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x] = 1$

$\therefore 1 \le x < 2$

$\therefore a = 1, b = 2$이므로 $2a + b = 4$

9. 방정식 $\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x-\frac{1}{2}\right]-7=0$의 해 $a \le x < b$ 또는 $c \le x < d$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\left[x-\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{2}\right]-1$이므로

$\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x+\frac{1}{2}\right]-4=0$

$\left[x+\frac{1}{2}\right]=4$또는 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=-1$이므로

$\frac{7}{2} \le x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \le x < -\frac{1}{2}$이다

따라서 구하는 값은

$\therefore a+b+c+d=6$

10. $x^2+xy+ay^2+x+y-2$가 $x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2+xy+ay^2+x+y-2$

$=x^2+(y+1)x+ay^2+y-2$가

$x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$D=(y+1)^2-4(ay^2+y-2)$

$\quad =y^2+2y+1-4ay^2-4y+8$

$\quad =(1-4a)y^2-2y+9$에서

$\frac{D}{4}=1-9(1-4a)=0$

$\therefore\ 1-9+36a=0$

$\therefore\ a=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

11. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$ 이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$ 에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2}$$

$$= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{}$ 안에 있는

$25y^2 - 4ay + 4$ 가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, $25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$

$\therefore -4a = \pm 20,$

$a = \pm 5$

$\therefore$ 양수 a 는 5

12. $2x^2-3xy+my^2-3x+y+1$이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 m 의 값은?

① -3　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 3

해설

$2x^2-3xy+my^2-3x+y+1$

$=2x^2-(3y+3)x+my^2+y+1$

이 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로

$D=(3y+3)^2-8(my^2+y+1)$

$\quad=9y^2+18y+9-8my^2-8y-8$

$\quad=(9-8m)y^2+10y+1$

여기서 $D/4=25-(9-8m)=0$이어야 하므로

$25-9+8m=0$

$8m=-16$

$\therefore m=-2$