1. 다항식 $x^{51}+30$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 이때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+R$ 이라 하면
$x=-1$을 대입하면 $R=29$
$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+29$
$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는
$Q(1)$, $x=1$ 식에 대입
$31=2Q(1)+29$
$\therefore\ Q(1)=1$

2. 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -2이다. $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x) = (x-3)Q(x) + 1$

$Q(2) = -2$

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 $f(2)$이다.

$$\begin{aligned} f(2) &= (2-3)Q(2) + 1 \\ &= -1 \times (-2) + 1 = 3 \end{aligned}$$

3. 다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누면 $3x+2$가 남고, 그 몫을 $x-1$로 나누면 2가 남는다. 이 다항식 $f(x)$를 x^3-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\frac{1}{2}R(2)$의 값을 구하면?

① 41 ② 31 ③ 21 ④ 11 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)Q(x)+3x+2 \\ &= (x^2+x+1)\{(x-1)p(x)+2\}+3x+2 \\ &= (x^3-1)p(x)+2x^2+5x+4 \end{aligned}$$

$\therefore R(x) = 2x^2+5x+4$

$\therefore \frac{1}{2}R(2) = 11$

4. 최대공약수가 $x+1$ 인 두 다항식 x^2+3x+a, x^2+ax-b 의 최소공배수를 $L(x)$ 라 할 때, $L(1)$ 의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

최대공약수가 $x+1$ 이므로
두 다항식에 $x=-1$ 을 대입하면 0 이 된다.
$1-3+a=0 \therefore a=2$
$1-a-b=0 \quad \therefore b=-1$
따라서 두 다항식은 각각
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$
$x^2+2x+1=(x+1)^2$
최소공배수 $L(x)$ 는 $(x+1)^2(x+2)$
$\therefore L(1)=(1+1)^2(1+2)=12$

5. 두 다항식 $x^2 + ax + b$, $x^2 + 3bx + 2a$의 최대공약수가 $x - 1$일 때, $a + b$의 값을 구하면?

① 2　② 1　③ 0　④ -1　⑤ -2

해설

최대공약수가 $x - 1$이므로
$x^2 + ax + b$와 $x^2 + 3bx + 2a$는
모두 $x - 1$로 나누어 떨어져야 한다.
$\therefore\ 1 + a + b = 0$이고 $1 + 3b + 2a = 0$
따라서, $a = -2,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = -1$

6. 두 다항식 x^2+3x+a, x^2-3x+b의 최대공약수가 $x-1$일 때, 최소공배수를 구하여라.

① $x^3+3x^2-12x+8$
② $x^3-3x^2+10x-8$
③ $x^3+x^2-10x+8$
④ x^3-9x+8
⑤ $x^3+2x^2-8x+10$

해설

최대공약수는 두 식의 인수이므로 인수정리를 이용하여 a, b를 구한다.
$1+3+a=0$ $1-3+b=0$에서 $a=-4$ $b=2$
$\therefore$ $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$
$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$
그러므로 두 다항식의 최소공배수는
$(x-1)(x-2)(x+4)=x^3+x^2-10x+8$

7. $1 < x < 3$인 x에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$의 해를 구하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2 ② $1 + \sqrt{2}$ ③ $1 + \sqrt{3}$

④ $\sqrt{5} - 1$ ⑤ $2\sqrt{2} - 1$

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$
준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x - 2)(x + 1) = 0$
$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$
그런데 $1 < x < 2$이므로 만족하는 해가 없다.
(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$
준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$
그런데 $2 \le x < 3$이므로 만족하는 해는
$x = 1 + \sqrt{3}$

8. 방정식 $\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x-\frac{1}{2}\right]-7=0$의 해 $a \le x < b$ 또는 $c \le x < d$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$\left[x-\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{2}\right]-1$이므로

$\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x+\frac{1}{2}\right]-4=0$

$\left[x+\frac{1}{2}\right]=4$ 또는 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=-1$이므로

$\frac{7}{2} \le x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \le x < -\frac{1}{2}$이다

따라서 구하는 값은

$\therefore a+b+c+d=6$

9. $1 < x < 4$일 때, 방정식 $x^2 + [x] = 4x$의 근의 개수는?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로
$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{3}$
이것은 모두 $1 < x < 2$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(ii) $2 \leq x < 3$일 때, $[x] = 2$이므로
$x^2 - 4x + 2 = 0,\ \therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$
이것은 모두 $2 \leq x < 3$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(iii) $3 \leq x < 4$일 때, $[x] = 3$이므로
$x^2 - 4x + 3 = 0,\ (x-1)(x-3) = 0$
$\therefore x = 1$ 또는 3
그런데 $3 \leq x < 4$를 만족하는 것은 $x = 3$
따라서 주어진 식의 근은 1 개이다.

10. 이차식 $x^2 - xy - 2y^2 - ax - 3y - 1$ 이 x, y 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

해설

(주어진 식)$=0$이라 놓고 x에 관하여 정리하면

$x^2 - (a+y)x - (2y^2 + 3y + 1) = 0$

근의 공식에서

$$x = \frac{a + y \pm \sqrt{(a+y)^2 + 4(2y^2 + 3y + 1)}}{2}$$

$$= \frac{a + y \pm \sqrt{9y^2 + 2(a+6)y + a^2 + 4}}{2}$$

주어진 식이 x, y에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식($=D$) 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D = 9y^2 + 2(a+6)y + a^2 + 4$의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4} = (a+6)^2 - 9(a^2+4) = -8a^2 + 12a = 0$$

$\therefore\ a = 0$ 또는 $a = \frac{3}{2}$

$\therefore\ 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

11. x, y 에 대한 이차식 $2x^2+xy-y^2-x+2y+k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

$2x^2+xy-y^2-x+2y+k$를 x 에 대해 정리하면

$2x^2+(y-1)x-y^2+2y+k$

이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면

판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D=(y-1)^2-4\times2(-y^2+2y+k)$$
$$=9y^2-18y-8k+1$$

이 식이 완전제곱식이므로

$$\frac{D'}{4}=9^2+9(-8k+1)$$

$\therefore k=-1$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여

$(2x-y+a)(x+y+b)$ 로 나타낼 수 있다.

전개하면, $2x^2+xy-y^2+(a+2b)x+(a-b)y+ab$ 이고

문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{rr} & a+2b=-1 \\ -) & a-\ b=2 \\ \hline & 3b=-3 \end{array}$$

$\therefore a=1,\quad b=-1$

$\therefore k=ab=-1$

12. $x^2-xy-6y^2+x+7y+k$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 상수 k의 값을 정하면?

① -2　② -4　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

x에 관해 식을 정리하면
$f(x)=x^2+(1-y)x+(-6y^2+7y+k)$
$f(x)$가 두개의 일차식으로 인수분해 되려면
$D=(1-y)^2-4(-6y^2+7y+k)$가 완전제곱식이어야 한다.
$D=25y^2-30y+(1-4k)$에서
$\frac{D}{4}=(-15)^2-25(1-4k)=0$
$\therefore\ k=-2$