1. $x = 2009,\ y = 7440$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

주어진 식을 정리하면

$$\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$$

$$= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$$

$$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{xy + y^2 i - x^2 i + xy} = 0$$

따라서 구하는 값은 0

2. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \quad y = (x-1)^2 - 3$
$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

3. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$ 이고 $ab\neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $ax+by=0$ ② $a+b=x+y$ ③ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

④ $x=y$ ⑤ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0$을
간단히 정리하면
$a^2y^2+b^2x^2-2abxy=0$
즉, $(ay-bx)^2=0$
$\therefore\ ay-bx=0(\because\ a,\ x,\ b,\ y$는 실수)
따라서, $ay=bx$에서 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

4. $a = 2004,\ b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21　② 23　③ 25　④ 27　⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

5. 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 x^2-x-12로 나눈 나머지가 $14x-9$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

몫을 $Q(x)$라 하면

x^3+ax^2+bx+3

$=(x^2-x-12)Q(x)+14x-9$

$=(x-4)(x+3)Q(x)+14x-9$

$x=4,\ x=-3$을 각각 대입하면

$16a+4b+67=47\cdots$㉠

$9a-3b-24=-51\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=3$

$\therefore\ a+b=1$

6. $3x^2 + 2xy - y^2 - 4y - 3$을 인수분해 하면?

① $(x + y + 1)(3x + y - 3)$
② $(x - y + 1)(3x - y - 3)$
③ $(3x + y + 1)(x - y - 3)$
④ $(x + y + 1)(3x - y - 3)$
⑤ $(x - y - 1)(3x - y - 3)$

해설

$3x^2 + 2xy - y^2 - 4y - 3$
$= \{3x - (y + 3)\}(x + y + 1)$
$= (x + y + 1)(3x - y - 3)$

7. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

> ㈎ $f(x)+g(x)=2x^2-2x-4$
>
> ㈏ $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는 x^3-7x+6

이 때, $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수를 $G(x)$라 할 때, $G(2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는
$L(x)=(x-1)(x^2+x-6)$
$=(x-1)(x-2)(x+3)\cdots$㉠
또, 두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수가 $G(x)$이므로
$f(x)=G(x)A(x)$, $g(x)=G(x)B(x)$
($A(x)$, $B(x)$는 서로소)라 하면
$f(x)+g(x)=G(x)A(x)+G(x)B(x)$
$=G(x)\{A(x)+B(x)\}$이므로
$f(x)+g(x)$는 $G(x)$를 인수로 갖는다.
$f(x)+g(x)=2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)$
$=2(x-2)(x+1)\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $G(x)=x-2$
$\therefore\ G(2)=0$

8. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최대공약수가 $x+3$이고, 최소공배수가 x^3+4x^2+x-6일 때 두 이차식을 구하면?

① $\begin{cases} x^2+x-3 \\ x^2+5x+1 \end{cases}$

② $\begin{cases} x^2+x-6 \\ x^2+4x+3 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x^2+x-2 \\ x^2-x+3 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x^2+2x-3 \\ x^2+5x+6 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x^2+4x+3 \\ x^2-x-6 \end{cases}$

해설

$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+2)(x+3)$
두 이차식은 $(x-1)(x+3)$, $(x+2)(x+3)$에서
x^2+2x-3, x^2+5x+6

9. 이차항의 계수가 1 인 두 이차 다항식의 최소공배수가 x^3+6x^2-x-30 이고, 최대공약수가 $x-2$ 일 때, 두 다항식의 합을 바르게 구한 것은?

① $2x^2+4x-16$ ② $2x^2+3x-8$ ③ x^2-5x-1

④ $2x^2+x+4$ ⑤ x^2+2x+5

해설

두 이차 다항식을 $A=a(x-2)$, $B=b(x-2)$ (a, b 는 서로소) 라고 하면

$L=x^3+6x^2-x-30=abG=ab(x-2)$ 이고,

L 을 인수분해하면

$L=(x-2)(x^2+8x+15)=$

$\underbrace{(x-2)}_{G}\underbrace{(x+3)(x+5)}_{ab}$

따라서, 두 다항식은

$(x-2)(x+3)=x^2+x-6$

$(x-2)(x+5)=x^2+3x-10$ 이므로

두 다항식의 합은

$(x^2+x-6)+(x^2+3x-10)=2x^2+4x-16$

10. 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 (x, y)로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

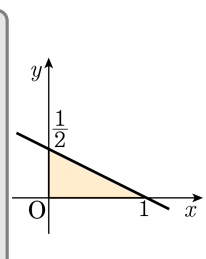
$(\text{준식}) = (2x-2y)+(x+2y-1)\,i = 0$

$\therefore\ x+2y-1=0,$

$y = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ 넓이 $= \frac{1}{4}$



11. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{50}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-i$ ② 0 ③ i ④ $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ ⑤ $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

해설

$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$

$\therefore \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{50}=(i)^{25}$

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$

$\therefore \left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50}=(-i)^{25}=-(i)^{25}$

$\therefore i^{25}+(-i^{25})=0$

12. 이차방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2+x-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근의 곱은?

① $-\sqrt{2}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면
$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=0$
$x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$
$(x+\sqrt{2})(x-1)$
$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=1$
따라서 두 근의 곱은 $-\sqrt{2}$

13. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합은?

① -1 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 2

해설

$f(x)=0$의 두 근을 a, b라 하면 $a+b=3$

$2x+1=t$라 하면 $x=\frac{t-1}{2}$

$f(2x+1)=f(t)=0$에서

$f(t)=0$의 해가 $t=a,\ t=b$이므로

$f(2x+1)=0$의 해는 $x=\frac{a-1}{2}, \frac{b-1}{2}$ 이다.

$\therefore \frac{a-1}{2}+\frac{b-1}{2}=\frac{a+b-2}{2}=\frac{1}{2}$

14. $a > 0$일 때, $x^2 + ax + b = 0$의 근이 모두 음수인 경우 실수 b의 값의 범위는?

① $b < 0$　② $\frac{-a^2}{4} \le b < 0$　③ $0 < b \le \frac{a^2}{4}$

④ $b > 0$　⑤ $0 < b < a$

해설

$D = a^2 - 4b \ge 0$

$\therefore b \le \frac{a^2}{4}$

(두 근의 곱) $=$ $b > 0$

$\therefore 0 < b \le \frac{a^2}{4}$

15. 이차함수 $y = 2(x+1)(2x-3)$ 의 최솟값은?

① $-\frac{25}{4}$ ② $-\frac{27}{4}$ ③ $-\frac{21}{5}$ ④ $-\frac{23}{5}$ ⑤ $-\frac{25}{7}$

해설

$$\begin{aligned} y &= 2(x+1)(2x-3) \\ &= 2(2x^2 - x - 3) \\ &= 4\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) - 6 \\ &= 4\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) - \frac{25}{4} \end{aligned}$$

16. x가 실수일 때 $\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}$의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}=k$라 두면

$x^2-x+4=k(x^2+x+1)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-4=0$

x가 실수이므로 실근이다.

따라서, 판별식 $D=(k+1)^2-4(k-1)(k-4)\geq 0$

$3k^2-22k+15\leq 0$

$\therefore \dfrac{11-2\sqrt{19}}{3}\leq k\leq \dfrac{11+2\sqrt{19}}{3}$

k는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면

$0.\times\times\leq k\leq 6.\times\times$에서

$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 의 6개이다.

17. $x+\dfrac{1}{x}=1$ 일 때, $x^{101}+\dfrac{1}{x^{101}}$ 의 값은?

① 1 ② −1 ③ −2 ④ 2 ⑤ 101

해설

$x+\dfrac{1}{x}=1$ 에서 $x^2+1=x$

$\therefore\ x^2-x+1=0,\ x^3=-1$

$(\text{준 식})=(x^3)^{33}\cdot x^2+\dfrac{1}{(x^3)^{33}\cdot x^2}$

$=-x^2+\dfrac{-1}{x^2}=-\dfrac{x^4+1}{x^2}=-\dfrac{-x+1}{x^2}$

$=\dfrac{x-1}{x^2}=1$

18. $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$을 동시에 만족시키는 x,y,z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=1$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 11 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 4

해설

(i) $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$에서
$x,\ y$를 z에 대하여 나타내면
$x=2z+1,\ y=-3z-1$

(ii) $x=2z+1,\ y=-3z-1$을 $ax^2+by^2+cz^2=1$에 대입하여 정리하면
$(4a+9b+c)z^2+2(2a+3b)z+(a+b-1)=0$
$\therefore\ 4a+9b+c=0,\ 2a+3b=0,\ a+b-1=0$
$\therefore\ a=3,\ b=-2,\ c=6$
$\therefore\ a+b+c=7$

19. x에 대한 항등식 $(x^2-x-1)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$에서 $a_1 + a_3 + a_5$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면,
$-1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_6 \quad \cdots$㉠
양변에 $x = -1$을 대입하면,
$1 = a_0 - a_1 + \cdots + a_6 \quad \cdots$㉡
㉠ − ㉡: $-2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$
$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 = -1$

20. x에 관한 3차 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2, $x+1$로 나눈 나머지가 4라고 한다. $f(x)$에서 x^2의 계수를 a, 상수항을 b라 하면 $a+b$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x)=px^3+ax^2+qx+b$라 하면
$f(1)=2,\ f(-1)=4$에서
$p+a+q+b=2\cdots$㉠
$-p+a-q+b=4\cdots$㉡
㉠+㉡를 하면
$2(a+b)=6,\ a+b=3$