1. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 라 놓으면,

$f(1) = 1 - a + b - 2 = 0$

$\therefore \quad -a + b = 1 \cdots$ ㉠

$f(-2) = -8 - 4a - 2b - 2 = 0$

$\therefore \quad 2a + b = -5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = -2,\ b = -1$

2. $x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a = 12,\ b = 9$

② $a = -12,\ b = 9$

③ $a = 12,\ b = -9$

④ $a = -12,\ b = -9$

⑤ $a = 9,\ b = 12$

해설

$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b = (x^2 + px + q)^2$ 으로 놓으면
이 식의 우변은
$x^4 + 2x^2(px + q) + (px + q)^2$
$= x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2$
좌변과 계수를 비교하면
$2p = 4,\ p^2 + 2q = -2$
$p = 2,\ q = -3$ 에서
$a = 2pq = -12,\ b = q^2 = 9$

3. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1 + 2i}{1 - i}$, $z = \dfrac{1 - 2i}{1 - i}$ 일 때, $xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$ ② $-1 - 2i$ ③ $-1 + 2i$

④ $-1 - i$ ⑤ $-1 + i$

해설

$$x = 1 + 2i,\ y = \frac{1 + 2i}{1 - i},\ z = \frac{1 - 2i}{1 - i}$$

$$\therefore\ xy + xz = \frac{(1 + 2i)^2}{1 - i} + \frac{(1 - 2i)(1 + 2i)}{1 - i}$$

$$= \frac{-3 + 4i + 5}{1 - i}$$

$$= \frac{2 + 4i}{1 - i}$$

$$= -1 + 3i$$

4. 실수 x 에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1| + |x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$ ② $-2x+1$ ③ 3

④ -3 ⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0, \quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1-x+2 = 3$

5. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 실수 p의 값을 모두 곱하면?

① -8 ② -4 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$D = p^2 - 4(2p + 1)$

$= p^2 - 8p - 4 = 0$

판별식으로부터 나온 p에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로

실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4이다.

6. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + 3 = 0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a = 2 + 3$, $a = -5$

$b = 2 \cdot 3 = 6$

$\therefore\ -5x^2 + 6x + 3 = 0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

7. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3 ② 0 ③ 2

④ 4 ⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

8. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 10$ 의 최댓값을 M , $y = 3x^2 + 6x - 5$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = -x^2 + 2x + 10$

$= -(x-1)^2 + 11$ 에서 $M = 11$

$y = 3x^2 + 6x - 5$

$= 3(x+1)^2 - 8$ 에서 $m = -8$

$\therefore M + m = 11 - 8 = 3$

9. 두 다항식 A, B 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$ ㉠

$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$ ㉡

$(㉠+㉡)\div 3:\ A=x^3-x^2+x+2$

$(2㉠-㉡)\div 3:\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

10. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 14 ⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$

좌변을 $2x - 1$ 로 나누면

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$

$\therefore\ B = x^2 - 3x + 2$

11. $a = 2004,\ b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

12. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=6,\ abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=2\times(6-(-1))-3=11$

13. $f(x)$가 x의 다항식일 때 $(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$가 x에 대한 항등식이 될 때 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$에서

$x^2=2$를 대입하면 $0=16+4a+b\cdots$①

$x^4=-1$을 대입하면 $0=1-a+b\cdots$②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-4$

$\therefore\ a+b=-7$

14. $\dfrac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 $= k$)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$에서

$(2-4k)x + 3a - k = 0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로,

$2-4k = 0,\ 3a-k = 0$

$k = \dfrac{1}{2}$ 이므로 $3a = k$에서 $a = \dfrac{1}{6}$

$\therefore\ 12a = 2$

15. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1\neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

16. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

17. $(x^3+2x^2-3x+2)^4(2x-1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3+2x^2-3x+2)^4 \cdot (2x-1)^7$

$= a_0x^{19} + a_1x^{18} + a_2x^{17} + \cdots + a_{19}$ 로 놓으면

계수들의 총합 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{19}$ 는 양변에 $x = 1$ 을 대입한 결과와 같으므로 항등식의 성질에서

$(1+2-3+2)^4 \cdot (2-1)^7 = 2^4 = 16$

18. 두 다항식 $f(x)=x^2+3x+a$, $g(x)=x^3+ax$를 $x+2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

해설

$f(x)=x^2+3x+a$, $g(x)=x^3+ax$에서
$f(-2)=g(-2)$이므로
$4-6+a=-8-2a$
$\therefore\ a=-2$

19. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$로 나누면 나머지는 -4이고, 그 몫을 $x+2$로 나누면 나머지는 2이다. 이때, $f(x)$를 $x+2$로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

20. x의 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눌 때, 나머지가 2이다. 이 때, $(x^2-x+3)f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지를 구하면?

① 10 ② 6 ③ 0 ④ 30 ⑤ 12

해설

$f(-1)=2$

$(x^2-x+3)f(x)=(x+1)Q(x)+R$

$x=-1$ 대입

$\therefore R=5f(-1)=5\times 2=10$

21. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-3$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $a+b+c+d+k$의 값을 구하면?

k	1	a	-1	b
		c	d	33
	1	4	11	37

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-3$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

3	1	a	-1	b
		3	$3a+9$	$9a+24$
	1	$a+3$	$3a+8$	$9a+b+24$

이때 $k=3$, $c=3$, $a+3=4$, $3a+9=d$, $9a+b+24=37$ 이므로

$k=3$, $c=3$, $a=1$, $d=12$, $b=4$

따라서 $a+b+c+d+k=1+4+3+12+3=23$

22. 임의의 실수 x에 대하여 $2x^3-5x+2 = a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 성립할 때, $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ 의 값을 구하면?

① 56 ② 28 ③ −28 ④ −46 ⑤ −56

해설

a, b, c, d 는 $2x^2 - 5x + 2$ 를 $(x + 1)$ 로 계속 나눠 줄때 나오는 나머지이다.

조립제법을 이용해 보면

−1	2	0	−5	2	
		−2	2	3	
−1	2	−2	−3	5	← d
		−2	4		
−1	2	−4	1	← c	
		−2			
−1	2	−6	← b		
	↑				
	a				

$\therefore a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2^2 - (-6)^2 + 1^2 - 5^2 = -56$

23. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a-b$ ② $b-c$ ③ $c-a$

④ $a+b+c$ ⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$$(\text{준식}) = a^3(b-c) - a(b^3-c^3) + bc(b^2-c^2)$$
$$= (b-c)\{a^3 - a(b^2+bc+c^2) + bc(b+c)\}$$
$$= (b-c)\{b^2(c-a) + b(c^2-ca) - a(c^2-a^2)\}$$
$$= (b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$$
$$= (b-c)(c-a)\{c(b-a) + (b^2-a^2)\}$$
$$= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$$

24. 다항식 $6x^3 + 5x^2 - 2x - 1$을 인수분해하면?

① $(x-1)(2x-1)(2x+1)$ ② $(x+1)(2x+1)(2x-1)$

③ $(x+1)(2x+1)(3x-1)$ ④ $(x+1)(2x-1)(3x+1)$

⑤ $(x-1)(2x+1)(2x-1)$

해설

$f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1$이라 하면
$f(-1) = 0$이므로
$f(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.
$\therefore\ 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = (x+1)(6x^2 - x - 1)$
$= (x+1)(2x-1)(3x+1)$

25. $\dfrac{2012^3+1}{2012\times 2011+1}$ 의 값을 a라 할 때, $\dfrac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1007}{1006}$

해설

$$a=\frac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)}$$

$=2013$ 이므로

$$\therefore \frac{a+1}{a-1}=\frac{2013+1}{2013-1}=\frac{2014}{2012}=\frac{1007}{1006}$$

26. $a+b-2c=1,\ a-b+3c=3$ 일 때, 다음 중 $a+ab+c^2$ 을 a 에 관한 식으로 나타낸 것은?

① $(a-8)(a-2)$ ② $(a+8)(a-2)$

③ $-(a-8)(a-2)$ ④ $-(a-8)(a+2)$

⑤ $-(a+8)(a-2)$

해설

$a+b-2c=1 \quad \cdots$ ㉠

$a-b+3c=3 \quad \cdots$ ㉡

㉠+㉡에서 $2a+c=4$

$\therefore c=-2a+4 \quad \cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $b=-5+9$

$$\begin{aligned}\therefore a+ab+c^2 &= a+a(-5a+9)+(-2a+4)^2 \\ &= -a^2-6a+16 \\ &= -(a^2+6a-16) \\ &= -(a+8)(a-2)\end{aligned}$$

27. 두 다항식 x^2+3x+a, x^2-3x+b의 최대공약수가 $x-1$일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$라 하자. $f(0)$의 값을 구하면?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

$x-1$이 최대 공약수라면 두 식에
$x=1$을 대입하면 0이 된다.
$A: x^2+3x+a$ 에 $x=1$을 대입하면
$1+3+a=0 \quad \therefore a=-4$
$B: x^2-3x+b$ 에 $x=1$을 대입하면
$1-3+b=0 \quad \therefore b=2$
$A: x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$
$B: x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$
최소공배수 $f(x)=(x-1)(x+4)(x-2)$가 된다.
$f(0)=(-1)\cdot(4)\cdot(-2)=8$

28. 이차항의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C가 다음 세 조건을 만족할 때, A를 구하면?

㉠ A, B의 최대공약수는 $x-2$이다.
㉡ B, C의 최대공약수는 $x+1$이다.
㉢ A, C의 최소공배수는 x^3-2x^2-x+2이다.

① x^2-4x+3 ② x^2-3x+2 ③ x^2-2x+1

④ x^2-2x-3 ⑤ x^2-x+2

해설

이차항의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C에 대하여

A, B의 최대공약수가 $x-2$이므로

$A=(x-2)(x-\alpha)$, $B=(x-2)(x-\beta)$

B, C의 최대공약수가 $x+1$이므로

$B=(x+1)(x-2)$, $C=(x+1)(x-\gamma)$

A, C의 최소공배수는

$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-2)(x-1)$

$\therefore\ x-\alpha=x-\gamma=x-1$

$\therefore\ A=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$

29. 두 이차식의 합이 $2x^2 - x - 6$ 이고, 최소공배수가 $x^3 + x^2 - 4x - 4$ 일 때, 두 이차식의 최대공약수는?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$ ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

해설

최대공약수는 합과 최소공배수의 공통인수

$2x^2 - x - 6 = (x-2)(2x+3)$

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x-2)(x+2)(x+1)$

30. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$

순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,

$x=1$

31. n 개의 수 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$ 는 $1, -1, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 중에서 하나의 값을 가진다고 한다. 보기 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 0$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = 0$ 이라고 할 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

① 300 ② 303 ③ 305 ④ 308 ⑤ 310

해설

$a_1, a_2, \cdots a_n$ 중 1이 a 개, -1 이 b 개 , $\sqrt{2}i$ 가 c 개, $-\sqrt{2}i$ 가 d 개 있다고 하면, a, b, c, d 는 음이 아닌 정수

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$= 1 \times a + (-1) \times b + (\sqrt{2}i) \times c + (-\sqrt{2}i) \times d$

$= a - b + \sqrt{2}i\,(c - d) = 0$

a, b, c, d 는 실수이므로 $a - b, c - d$ 도 실수

복소수의 상등에 의해 $a = b,\ c = d \cdots ①$

$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$

$= 1^2 \times a + (-1)^2 \times b + (\sqrt{2}i)^2 \times c + (-\sqrt{2}i)^2 \times d$

$= a + b - 2c - 2d = (a + b) - 2(c + d) = 0$

$a + b = 2(c + d)$

$2a = 4c (\because\ ①)$

$\therefore\ a = 2c$

$\therefore\ a : b : c : d = 1 : 1 : 2 : 2$

$\therefore\ n = a + b + c + d = 6a$, n 은 6 의 배수

32. n 이 자연수일 때, $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^n = 0$ 을 만족하는 n 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$n = 1$ 일 때,

$$\frac{\sqrt{2}}{1+i} + \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}(1-i) + \sqrt{2}(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$n = 2$ 일 때, $\frac{2}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1-i)^2} = \frac{2}{2i} + \frac{2}{-2i} = 0$

그러므로 최솟값 $n = 2$

33. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^3 - y^3$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}i$ ② $-2\sqrt{2}i$ ③ $\sqrt{2}i$

④ $-\sqrt{2}i$ ⑤ $2i$

해설

$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$

$x - y = 2\sqrt{2}i,\ xy = (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) = 3$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (2\sqrt{2}i)^3 + 3 \cdot 3 \cdot (2\sqrt{2}i) \\ &= -16\sqrt{2}i + 18\sqrt{2}i \\ &= 2\sqrt{2}i \end{aligned}$$

34. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $z+\bar{z}$ 는 실수이다.

② $z=\bar{z}$ 이면 z 는 실수이다.

③ $z\bar{z}=1$ 이면 $z^2=1$ 이다.

④ $z\bar{z}=0$ 이면 $z=0$ 이다.

⑤ $z\bar{z}$ 는 실수이다.

해설

복소수 z 와 그의 켤레복소수를 각각
$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi$ (a, b 는 실수) 라 하면

① $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (참)

② $z=\bar{z} \Leftrightarrow a+bi=a-bi$

$\Leftrightarrow 2bi=0$

$\Leftrightarrow b=0$ (참)

③ $z\bar{z}=a^2+b^2=1 \Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi \neq 1$ (거짓)

(반례) $a=0,\ b=1$ 일 때, $z^2=-1$

④ $z\bar{z}=a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$ (참)

⑤ $z\bar{z}=a^2+b^2$ (참)

35. x에 대한 일차방정식 $5x + a = 2x + 12$의 해가 자연수일 때, 자연수 a의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 무수히 많다

해설

$5x - 2x = 12 - a, 3x = 12 - a$

$\therefore x = \dfrac{12 - a}{3}$

자연수 $a = 1, 2, 3, \cdots$ 을 대입했을 때,

$x = \dfrac{12 - a}{3}$ 가 자연수가 되는 경우는

$12 - a$ 가 3 의 배수이면서 $a < 12$ 일 때이다.

i) $a = 3$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 3}{3} = 3$

ii) $a = 6$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 6}{3} = 2$

iii) $a = 9$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 9}{3} = 1$

따라서 자연수 a의 개수는 3개이다.

36. x에 대한 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$이 되도록 유리수 p, q를 정할 때, $p + q$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$이면,
그 켤레근인 $2 - \sqrt{3}$도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
$-p = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$
$\therefore\ p = -4$
$q = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$
$\therefore\ q = 1$
$\therefore\ p + q = -4 + 1 = -3$

37. x에 대한 이차방정식 $x^2-(k-3)x+k+2=0$의 두 근이 모두 양수일 때 실수 k의 값의 범위는?

① $k \geq -5-2\sqrt{6}$ ② $k \geq -5+2\sqrt{6}$ ③ $k \geq -5+\sqrt{6}$

④ $k \geq 5+\sqrt{6}$ ⑤ $k \geq 5+2\sqrt{6}$

해설

$x^2-(k-3)x+k+2=0$에서

$D=(k-3)^2-4(k+2)$

$=k^2-6k+9-4k-8$

$=k^2-10k+1 \geq 0$

$\therefore k \leq 5-2\sqrt{6}$ 또는 $k \geq 5+2\sqrt{6}$

두 근의 합 $k-3>0$이므로 $k>3$

두 근의 곱 $k+2>0$이므로 $k>-2$

따라서 $k \geq 5+2\sqrt{6}$

38. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2am - 2m + b$ 의 그래프가 m 의 값에 관계없이 x 축에 접할 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2 - 2ax + 2am - 2m + b = 0$ 에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (2am - 2m + b) = 0$

$\therefore a^2 - 2am + 2m - b = 0$

이 식이 m 의 값에 관계없이 성립하므로

$(2 - 2a)m + (a^2 - b) = 0$ 에서

$2 - 2a = 0,\ a^2 - b = 0$

따라서 $a = 1,\ b = 1$ 이므로 $ab = 1$

39. 이차함수 $y = 3x^2 - 6ax + 2a^2 - 4a + 6$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$y = 3x^2 - 6ax + 2a^2 - 4a + 6$$
$$= 3(x-a)^2 - a^2 - 4a + 6$$

최솟값 $m = -a^2 - 4a + 6 = -(a+2)^2 + 10$

$\therefore m$ 의 최댓값 : 10

40. 합이 28 인 두 자연수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 100 ② 121 ③ 144 ④ 169 ⑤ 196

해설

한 자연수를 x 라 하면, 나머지는 $28 - x$ 이다.
두 자연수의 곱은 $x(28 - x)$ 이다.
$x(28 - x) = -x^2 + 28x = -(x - 14)^2 + 196$

41. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0 ② -1 ③ 1 ④ -10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$$

42. $a(a+1)=1$ 일 때, $\dfrac{a^4-a^2}{a^6-1}$ 의 값은?

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

해설

$a(a+1)=1$ 에서

$a^2=-a+1$

$a^4=(-a+1)^2=a^2-2a+1$

$=(-a+1)-2a+1=-3a+2$

$a^6=a^4\times a^2=(-3a+2)(-a+1)$

$=3a^2-5a+2=3(-a+1)-5a+2$

$=-8a+5$

$\therefore \dfrac{a^4-a^2}{a^6-1}=\dfrac{-3a+2-(-a+1)}{-8a+5-1}$

$=\dfrac{-2a+1}{-8a+4}=\dfrac{-2a+1}{4(-2a+1)}$

$=\dfrac{1}{4}$

43. 다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지가 3이고, x^2-4x+3으로 나눌 때의 나머지가 $3x$일 때, $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지는?

① 3 ② $3x+3$ ③ $3x-3$

④ $6x-9$ ⑤ $9x+6$

해설

$f(x)=(x-2)(x-1)Q(x)+3$

$f(x)=(x-3)(x-1)Q'(x)+3x$

$\therefore\ f(2)=3,\ f(3)=9$ $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x-2)(x-3)Q''(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=3,\ f(3)=3a+b=9$

$a=6,\ b=-9$

$\therefore$ 나머지는 $6x-9$

44. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x = 21$이라 하면

$\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$

$= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$

$= \sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}$

$= \sqrt{\{(x^2+3x)+1\}^2}$

$= x^2+3x+1 \ (\because (x^2+3x)+1 > 0)$

$= 21^2 + 3 \cdot 21 + 1 = 505$

각자리 숫자의 합은 $5+0+5=10$

45. $w = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때, $(w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$w = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$\therefore\ w^2+w+1=0,\quad w^3=1$

$\therefore\ (w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$

$= (w-2w-2)^2+(2w-w-1)^2$

$= (-w-2)^2+(w-1)^2$

$= w^2+4w+4+w^2-2w+1$

$= 2w^2+2w+5$

$= 2(w^2+w+1)+3$

$= 3$

46. 이차식 $x^2 - xy - 2y^2 - ax - 3y - 1$ 이 $x,\ y$ 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

(주어진 식)$= 0$ 이라 놓고 x 에 관하여 정리하면

$x^2 - (a+y)x - (2y^2 + 3y + 1) = 0$

근의 공식에서

$$x = \frac{a + y \pm \sqrt{(a+y)^2 + 4(2y^2 + 3y + 1)}}{2}$$

$$= \frac{a + y \pm \sqrt{9y^2 + 2(a+6)y + a^2 + 4}}{2}$$

주어진 식이 $x,\ y$ 에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식$(= D)$ 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D = 9y^2 + 2(a+6)y + a^2 + 4$ 의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4} = (a+6)^2 - 9(a^2+4) = -8a^2 + 12a = 0$$

$\therefore\ a = 0$ 또는 $a = \frac{3}{2}$

$\therefore\ 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

47. α, β가 x에 관한 이차방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$의 두 근일 때, 다음 방정식의 근은?

$$(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$$

① $\alpha,\ \beta$　② $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$　③ $p,\ q$

④ $\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}$　⑤ $-p,\ -q$

해설

방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$을 정리하면

$x^2+(p+q)x+(pq-k)=0$

이 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=-(p+q),\ \alpha\beta=pq-k\cdots$ ㉮

방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$을 정리하면

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+k=0$

$\therefore\ x^2+(p+q)x+pq=0\ (\because$ ㉮ 대입)

$\therefore\ (x+p)(x+q)=0$

따라서 구하는 두 근은 $x=-p,\ -q$

48. $x^2 - 2kx + 1 = 0$의 해를 α, β라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 = 2$가 되도록 하는 k의 값들의 합을 구하면?

① 1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$\alpha + \beta = 2k$, $\alpha\beta = 1$이므로

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2$에서

$(2k)^3 - 3 \cdot 1 \cdot 2k = 2$

$4k^3 - 3k - 1 = 0$, $(k-1)(4k^2 + 4k + 1) = 0$,

$(k-1)(2k+1)^2 = 0$

$\therefore\ k = 1,\ -\frac{1}{2}$

$\therefore$ k값들의 합은 $\frac{1}{2}$

49. x에 대한 이차방정식 $x^2+2x-3=m(x+2)$가 $1<x<2$에서 적어도 한 개의 실근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} y=x^2=2x-3\cdots\cdots \text{㉠} \\ y=m(x+2)\cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

이라 하면 직선 ㉡은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.

이 때, 교점의 x좌표가 1 과 2사이에 존재해야 하므로

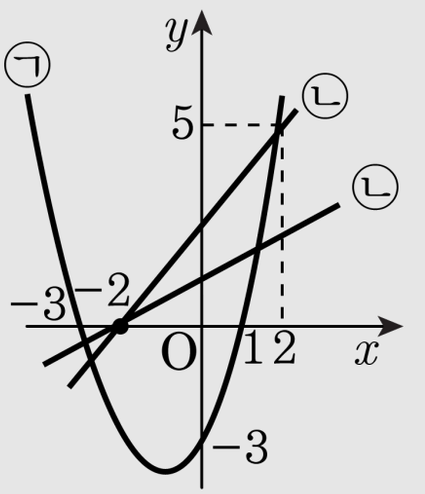
(i) 직선 ㉡이

점 $(1,\ 0)$을 지날 때

$3m=0 \quad \therefore m=0$

(ii) 직선 ㉡이 점 $(2,\ 5)$를 지날 때

$4m=5 \quad \therefore m=\frac{5}{4}$



(i), (ii)에서 $0<m<\frac{5}{4}$

따라서, 정수 m의 값은 1 하나뿐이다.

50. 두 실수 x, y 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$

x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$\frac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$

$x^2+2x-3\leq 0,\ \ (x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2