1. 두 복소수 $z_1 = a + (3b-1)i$, $z_2 = (b+1) - 5i$에 대하여 $z_1 = \bar{z_2}$가 성립할 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a + (3b-1)i = (b+1) + 5i$에서

$\begin{cases} a = b+1 \\ 3b-1 = 5 \end{cases}$ 이므로 연립하면

$a = 3, \ b = 2$

$\therefore \ a+b = 5$

2. 이차방정식 $ax^2+4x-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a 값의 범위는?

① $a>-2$

② $-2<a<0,\ a>0$

③ $-2<a<0$

④ $a>2$

⑤ $a<0,\ 0<a<2$

해설

$ax^2+4x-2=0$에서

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $a\neq 0$이어야 한다.

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=2^2-(-2a)>0,\ 2a+4>0$$

$\therefore a>-2$

따라서 실수 a값의 범위는

$-2<a<0$ 또는 $a>0$

3. 이차식 $2x^2-4x+3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\dfrac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\dfrac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\dfrac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\dfrac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\dfrac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\dfrac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a=2, b'=-2, c=3$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-6}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

4. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3 ② a^6+b^6 ③ a^6-b^6

④ a^9+b^9 ⑤ a^9-b^9

해설

(준 식)$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

5. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 $a,\ b,\ c$라 하자.

$4(a+b+c)=36,\ 2(ab+bc+ca)=56$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=81-56=25$

$$\therefore\ (\text{대각선의 길이})=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$=\sqrt{25}=5$$

6. 등식 $x^3+x-1=(x-a)(x-b)(x-c)$가 항등식일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하면?

① 2 ② 5 ③ 3 ④ 7 ⑤ -7

해설

x^3+x-1

$=(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

$\therefore a+b+c=0,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\therefore a^3+b^3+c^3=3$

7. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3이 x^2+1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=3$

② $a=1,\ b=3$

③ $a=3,\ b=-1$

④ $a=-3,\ b=-1$

⑤ $a=3,\ b=1$

해설

x^3+ax^2+bx+3

$=(x^2+1)(x+c)$

$=x^3+cx^2+x+c$

$\therefore\ a=c,\ b=1,\ c=3$

따라서 $a=3,\ b=1$

8. 임의의 실수 x 대하여 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{20}x^{20}$ 이 항상 성립할 때, $2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{20}$ 의 값은?

① 1023 ② 1024 ③ 1025 ④ 2046 ⑤ 2050

해설

$x = 0$ 대입, $a_0 = 1$

$x = 1$ 대입, $2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$

$2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{20} = 1 + 1024 = 1025$

9. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 -5이고, $x-1$로 나눈 나머지는 -1이다. 이때, $f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나눈 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $2x+3$ ③ $2x-1$

④ $2x$ ⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

한편, $f(x)$를 $x+1$, $x-1$로 나눈 나머지가 각각 -5, -1이므로

$f(-1)=-a+b=-5$, $f(1)=a+b=-1$

이것을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

따라서 구하는 나머지는 $2x-3$이다.

10. $\dfrac{2006^3 - 1}{2006 \times 2007 + 1}$ 의 값을 구하면?

① 2005 ② 2006 ③ 2007 ④ 2008 ⑤ 2009

해설

$a = 2006$ 로 놓으면

$$(\text{준식}) = \frac{a^3 - 1}{a(a+1)+1} = \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}$$

$$= a - 1 = 2005$$

11. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(x)+g(x)=2x^2-2x-4$
(나) $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는 x^3-7x+6

이 때, $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수를 $G(x)$라 할 때, $G(2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는

$$L(x)=(x-1)(x^2+x-6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3)\cdots㉠$$

또, 두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수가 $G(x)$이므로

$f(x)=G(x)A(x)$, $g(x)=G(x)B(x)$

$(A(x),\ B(x)$는 서로소$)$라 하면

$$f(x)+g(x)=G(x)A(x)+G(x)B(x)$$
$$=G(x)\{A(x)+B(x)\}$$ 이므로

$f(x)+g(x)$는 $G(x)$를 인수로 갖는다.

$$f(x)+g(x)=2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)$$
$$=2(x-2)(x+1)\cdots㉡$$

㉠, ㉡에서 $G(x)=x-2$

$\therefore\ G(2)=0$

12. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최소공배수가 x^3+6x^2-x-30 이고, 최대공약수가 $x-2$일 때, 두 다항식의 합을 바르게 구한 것은?

① $2x^2+4x-16$ ② $2x^2+3x-8$ ③ x^2-5x-1

④ $2x^2+x+4$ ⑤ x^2+2x+5

해설

두 이차 다항식을 $A=a(x-2)$, $B=b(x-2)$ (a, b 는 서로소) 라고 하면

$L=x^3+6x^2-x-30=abG=ab(x-2)$ 이고,

L 을 인수분해하면

$L=(x-2)(x^2+8x+15)=$

$\underbrace{(x-2)}_{G}\underbrace{(x+3)(x+5)}_{ab}$

따라서, 두 다항식은

$(x-2)(x+3)=x^2+x-6$

$(x-2)(x+5)=x^2+3x-10$ 이므로

두 다항식의 합은

$(x^2+x-6)+(x^2+3x-10)=2x^2+4x-16$

13. 다음 중 옳지 않은 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16}=-4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

14. $i^2 = -1$ 일 때, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(n+i)^4 = \{(n+i)^2\}^2 = (n^2-1+2ni)^2$
이것이 정수가 되려면 $n^2-1+2ni$ 가 정수가 되거나 순허수가 되어야 한다.
i) $n=0$ 일 때 성립
ii) $n^2-1=0$, $n=\pm1$ 일 때 성립
따라서 구하는 정수의 개수는 3 개

해설

$(n+i)^4 = n^4 - 6n^2 + 1 + i(4n^3 - 4n)$
이것이 실수이려면, $4n^3 - 4n = 0$, $n = 0$, ±1
이 때 $(n+i)^4$ 은 모두 정수가 되므로, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는 3 개다.

15. 이차방정식 $2x^2 - 6x + 3 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 아래 표에서 옳은 것의 개수는?

㉠ $\alpha + \beta = 3$	㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 6$
㉢ $\alpha\beta = -3$	㉣ $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = 2$
㉤ $(\alpha - 1)(\beta - 1) = \frac{1}{2}$	

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = \frac{3}{2}$

㉠ $\alpha + \beta = 3$ (○)

㉡ $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 6$ (○)

㉢ $\alpha\beta = \frac{3}{2} \neq -3$ (×)

㉣ $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{\beta\alpha}$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 9 - 4 \cdot \frac{3}{2} = 3 \quad |\alpha - \beta| = \sqrt{3}$

$\therefore \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \neq 2$ (×)

㉤ $\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = \frac{3}{2} - 3 + 1 = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$ (×)

16. 축이 $x = 2$ 이고, 두 점 $(0,\ 3)$, $(1,\ 6)$ 를 지나는 이차함수의 최댓값 또는 최솟값은?

① 최댓값 7 ② 최댓값 5 ③ 최솟값 7
④ 최솟값 5 ⑤ 최댓값 -7

해설

축이 $x = 2$ 이므로$y = a(x-2)^2 + q$
두 점 $(0,\ 3)$, $(1,\ 6)$ 을 지나므로
$3 = 4a + q,\ 6 = a + q$
$\therefore a = -1,\ q = 7$
$y = -(x-2)^2 + 7$
따라서 $x = 2$ 일 때, 최댓값 7 을 가지며 최솟값은 없다.

17. x^4-6x^2+1을 인수분해 하였더니 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$가 되었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

$x^4-6x^2+1=(x^4-2x^2+1)-4x^2$

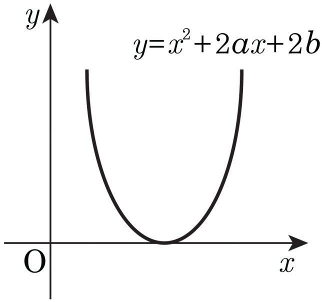
$=(x^2-1)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$

$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

$\therefore\ a+b+c+d=-2$

18. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\dfrac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b-1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

19. 이차함수 $y=2x^2-8x+3a-4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a,\ 8a+5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3　② $-\dfrac{3}{8}$　③ $\dfrac{3}{8}$　④ 3　⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2-8x+3a-4 \\ &= 2(x^2-4x+4-4)+3a-4 \\ &= 2(x-2)^2-12+3a \end{aligned}$$

$y=2(x-2)^2-12+3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a+5)$ 를 지나므로

$8a+5=2(2a-2)^2-12+3a$

$8a^2-21a-9=0,\ (8a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=-\dfrac{3}{8}$ 또는 3

그런데 최댓값 $-12+3a>-5$ 이므로

$i)\ a=-\dfrac{3}{8}$ 대입 :

$$-12+3\times\left(-\frac{3}{8}\right)=-12-\frac{9}{8}=-\frac{105}{8}<-5$$

$ii) a=3$ 대입 : $-12+3\times3=-12+9=-3>-5$

따라서 $a=3$ 이다.

20. x 의 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 3 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$x^2 - ax + a^2 - 3 = 0 \cdots$ ㉠

㉠는 두 실근을 가지므로,

$D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geq 0$, 즉 $a^2 - 4 \leq 0$ $\therefore$ $-2 \leq a \leq 2$

그런데 α, β 는 ㉡의 두 근이므로,

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a^2 - 3$

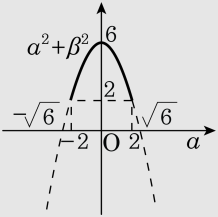
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 2(a^2 - 3) = 6 - a^2$

여기서, $-2 \leq a \leq 2$ 이므로

$0 \leq a^2 \leq 4$

$\therefore$ $2 \leq 6 - a^2 \leq 6$

$\therefore$ $2 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 6$



따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 은

$a = 0$ 일 때 최대이고, 최댓값 : 6

$a = \pm 2$ 일 때 최소이고, 최소값 : 2