1. x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 근을 구하면 $x=a\pm\sqrt{b}i$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$x^2-4x+6=0$

근의 공식을 이용하면 $x=2\pm\sqrt{4-6}=2\pm\sqrt{2}i$

$\therefore a=b=2,\quad a+b=4$

2. 이차방정식 $2x^2-2x+3=0$의 두 근을 구하면?

① $-1\pm\sqrt{5}i$　② $1\pm\sqrt{5}$　③ $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}i}{2}$

④ $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　⑤ $\dfrac{1\pm\sqrt{5}i}{2}$

해설

$2x^2-2x+3=0$에서

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-2\times3}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}i}{2}$$

3. 다음 이차방정식 중에서 한 근이 $x = -1 + \sqrt{3}$ 인 것은?

① $(x+1)^2 = -3$ ② $(x+1)^2 = 3$ ③ $(x+3)^2 = -1$

④ $(x+3)^2 = 1$ ⑤ $(x-1)^2 = 1$

해설

$(x+a)^2 = b$ 에서 $x + a = \pm\sqrt{b}$

$\therefore x = -a \pm \sqrt{b}$ 임을 이용해 각 방정식을 풀면

① $x = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{3}i$

② $x = -1 \pm \sqrt{3}$

③ $x = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$

④ $x = -3 \pm \sqrt{1}$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = -2$

⑤ $x = 1 \pm \sqrt{1}$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$

4. x에 대한 이차방정식 $x^2+a(a-1)x+3a=0$의 한 근이 1일 때, 다른 한 근은? (단, a는 상수)

① -1　② -3　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

$x=1$을 대입하면

$1^2+a(a-1)+3a=0$

$a^2+2a+1=(a+1)^2=0$

$\therefore\ a=-1$

$x^2-1\cdot(-2)x-3=x^2+2x-3$

$=(x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1, -3 \qquad \therefore\ x=-3$

5. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

㉠ $x^2+2x+1=0$	㉡ $x^2+2x+4=0$
㉢ $x^2+4x+2=0$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(x+1)^2=0$: 중근

㉡ $a=1, b'=1, c=4$

$1^2-1\cdot 4=-3<0$: 허근

㉢ $a=1, b'=2, c=2$

$2^2-1\cdot 2=2>0$: 서로 다른 두 실근 (○)

6. 이차방정식 $x^2-6x+k=0$이 중근을 가질 때, 실수 k의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 36

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot k=0$$

$\therefore\ k=9$

7. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-1)x+\frac{1}{4}a^2+a-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 조건을 구하면?

① $a>1$ ② $a<\frac{3}{2}$ ③ $a<\frac{3}{4}$ ④ $a>\frac{3}{4}$ ⑤ $a<2$

해설

판별식을 D라고 하면,

$$D=(a-1)^2-4\left(\frac{1}{4}a^2+a-2\right)=-6\mathrm{a}+9$$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$-6a+9>0$에서 $a<\frac{3}{2}$

8. 이차방정식 $5x^2-6x+a-5=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 때 정수 a의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$D'=9-5(a-5)=-5a+34<0$

$\therefore a>\dfrac{34}{5}$

9. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 할 때 $|\alpha-\beta|$는 다음 중 어느 것과 같은가 ?

① $\dfrac{\sqrt{D}}{a}$　② $\dfrac{-\sqrt{D}}{a}$　③ $\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$

④ $-\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$　⑤ $-\dfrac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

즉 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ (단, $D=b^2-4ac$)

$$\therefore |\alpha-\beta|=\left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{-b+\sqrt{D}+b+\sqrt{D}}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{2\sqrt{D}}{2a}\right|=\frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

10. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$\alpha + \beta = 3,\ \alpha\beta = 1$$

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)\\ &= 27 - 9 = 18\end{aligned}$$

11. 이차방정식 $x^2 - 10x + k = 0$의 두 근의 비가 $2 : 3$이 되도록 상수 k의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 방정식의 한 근을 2α라 하면
다른 한 근은 3α가 되므로

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\alpha = 10 & \cdots\cdots ① \\ 2\alpha \times 3\alpha = k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①, ②를 풀면
$\alpha = 2,\ k = 6 \times 2^2 = 24$

12. 이차방정식 $x^2-2x+a+1=0$의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가질 때, a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a<-1$

해설

(두 근의 곱)$=a+1<0 \quad \therefore a<-1$

13. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$
모든 x에 대해 성립하려면
$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$
공통근 : $a=1$

14. 방정식 $|x-1|=2$의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

i) $x \geq 1$일 때

$|x-1|=x-1$이므로, $x-1=2$

$\therefore x=3$

ii) $x<1$일 때

$|x-1|=-x+1$이므로, $-x+1=2$

$\therefore x=-1$

따라서 (i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

15. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

ⅰ) $x<1$일 때,
$-2(x-1)+(x-4)=0$
$\therefore x=-2$
ⅱ) $x\geq 1$일 때,
$2(x-1)+x-4=0$
$\therefore x=2$
따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

16. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -\sqrt{2}$ ② $x = \sqrt{2}$ ③ $x = 0$

④ $x = 4 - \sqrt{2}i$ ⑤ $x = 6$

해설

$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$

$\therefore\ x = \sqrt{2}$

17. 이차방정식 $x^2 + (k-4)x + k - 1 = 0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D = 0$ 일 때 중근을 가지므로
$D = (k-4)^2 - 4(k-1) = k^2 - 12k + 20 = 0$ 에서
$(k-2)(k-10) = 0$
따라서, $k = 2$, $k = 10$ 이므로 k 의 값은 12 이다.

18. 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a의 범위를 구하면?

① $a<1$ ② $a\geq 1$ ③ $-1<a<1$

④ $a>1$ ⑤ $a\geq -1$

해설

$x^2+2x+2-a=0$ 이

서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는

판별식 $D>0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=1-(2-a)>0$$

$$1-2+a>0$$

$$\therefore\ a>1$$

19. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

20. 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2 = b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 를 완전제곱식으로 고치면

$(x^2 + 2x + 1) + 2 = 0, \quad (x+1)^2 = -2$

$\therefore a = 1,\ b = -2$

$\therefore a - b = 3$

21. 이차방정식 $x^2+7x+1=0$의 두 근이 α, β일 때, $(\alpha^2+\beta^2)+5(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

이차방정식 $x^2+7x+1=0$의 두 근이 α, β이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta=-7,\ \alpha\beta=1$
$(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-7)^2-2\cdot1=47$
$\therefore\ 47+5\cdot(-7)=47-35=12$

22. 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a-5=0$의 두 실근을 β, β^2이라 할 때, $a+\beta+\beta^2$의 값은?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 3

해설

두 근의 합은 $\beta+\beta^2=-a-1$이므로

$a+\beta+\beta^2=a-a-1=-1$

23. 두 수 $1+2i$, $1-2i$를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-2x-5=0$ ② $x^2+2x+5=0$

③ $x^2+5x+2=0$ ④ $x^2-2x+5=0$

⑤ $x^2-5x+2=0$

해설

$\alpha+\beta=(1+2i)+(1-2i)=2$

$\alpha\beta=(1+2i)(1-2i)=5$

$\therefore x^2-2x+5=0$

24. 이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $2x^2-6x+1=0$

② $x^2-6x+1=0$

③ $x^2-7x+3=0$

④ $2x^2+6x-1=0$

⑤ $2x^2-7x+3=0$

해설

근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=\frac{6}{2}=3$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$ 이므로

3 과 $\frac{1}{2}$ 을 이용한 근과 계수의 관계를 구해보면

$3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, $3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$

$\therefore\ 2x^2-7x+3=0$

25. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a = 2, b' = -2, c = 3$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

26. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 <u>틀린</u> 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

27. 방정식 $a^2x+1=a(x+1)$의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a^2x+1=a(x+1)$ 에서 $a(a-1)x=a-1$

i) $a=1$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ii) $a=0$ 이면 $0\cdot x=-1$ 이므로 해가 없다.

iii) $a\neq 0, a\neq 1$ 일 때, $x=\dfrac{a-1}{a(a-1)}=\dfrac{1}{a}$

따라서 해가 없을 때의 a의 값은 0이다.

28. 방정식 $(x-1)^2+|x-1|-6=0$ 의 두 근의 합은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

$|x-1|$이 존재하므로 절댓값의 부호에 따라서
$x-1\geq 0,\ x-1<0$으로 구간을 나누면
i) $x\geq 0$ 일 때, $|x-1|=x-1$
$(x-1)^2+(x-1)-6=0$
$(x-3)(x+2)=0 \quad \therefore \ x=-2,\ 3$
하지만 $x\geq 0$이므로 $x=3$
ii) $x<0$ 일 때, $|x-1|=-(x-1)$
$(x-1)^2-(x-1)-6=0$
$(x-4)(x+1)=0 \quad \therefore \ x=-1,\ 4$
하지만 $x<0$이므로 $x=-1$
$\therefore$ 두 근의 합은 $3+(-1)=2$

29. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

(가)를 계수로 갖는 이차방정식은 (나)의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다)를 계수로 갖는 이차식 $ax^2 + bx + c$ 는 (라)의 범위에서는 반드시 (마)의 곱으로 인수분해된다.

① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식

② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식

③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

30. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

① 0 ② ±1 ③ $\pm\sqrt{2}$ ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ ±2

해설

(i) $x \geq 0$일 때 $|x| = x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$
$\therefore x = -4$또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$이므로 $x = -4$는 부적합
$\therefore x = 1$
(ii) $x < 0$일 때 $|x| = -x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$
$x = 4$또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -1$
$\therefore x = 1$또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$이므로 $x = 4$는 부적합
(i), (ii)에서 $x = \pm 1$

31. 방정식 $x^2-2|x|-3=0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x \geq 0$이므로 $x=3$

ⅱ) $x<0$일 때

$x^2+2x-3=0$, $(x-1)(x+3)=0$

$x=1$ 또는 $x=-3$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$ 또는 $x=-3$

따라서 근의 합은 0이다.

32. 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$의 한 근이 $2 + ai$일 때 실수 a, b의 합 $a + b$의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9 ② -5 ③ 3 ④ 6 ⑤ 12

해설

한 근이 $2 + ai$이므로 다른 한 근은 $2 - ai$이다.

$\therefore$두 근의 합 $-a = 4$ $\therefore a = -4$

두 근의 곱 $(2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 2b$

$\therefore b = 10$

$\therefore a + b = 10 - 4 = 6$

33. 0이 아닌 두 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 x에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $ax^2 - bx + 1 = 0$

ㄴ $x^2 - ax - b = 0$

ㄷ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2+b^2) = 0$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이므로 $a < 0,\ b < 0$

ㄱ $ax^2 - bx + 1 = 0$에서

$D = b^2 - 4a > 0$

ㄴ $x^2 - ax - b = 0$에서

$D = a^2 + 4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.

ㄷ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2+b^2) = 0$에서

$$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab > 0$$

34. A, B두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28,\ c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6,\ b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

35. 이차방정식 $x^2-2ix-k=0$의 근에 대한<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k>1$이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k=1$이면 두 근은 같다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0<k<1$이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉣　　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2-2ix-k=0$ 의 근을 구하면 $x=i\pm\sqrt{-1+k}$

㉠ $k>1$이어도 x는 허수이다.<거짓>

㉡ $k=1$이면 $x=i$로 두 근은 같다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉣ $0<k<1$이면 $-1<-1+k<0$ 이므로 $\sqrt{-1+k}=ai$ 의 형태가 되어 x는 순허수이다.<참>

36. 구간 $0 < x < 5$에서 $x = \dfrac{1}{x - [x]}$를 만족시키는 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개 ② 3개 ③ 4개

④ 5개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$이므로 x는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x - [x]$를 곱하면
$x^2 - x[x] - 1 = 0$
(i) $0 < x < 1$일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$
$\therefore\ x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$에 속하지 않는다.
$\therefore$ 해가 없다.
(ii) $1 < x < 2$일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$1 < x < 2$이므로 $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(iii) $2 < x < 3$일 때 $[x] = 2$
$\therefore\ x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
$2 < x < 3$이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(iv) $3 < x < 4$일 때 $[x] = 3$
$\therefore\ x^2 - 3x - 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$3 < x < 4$이므로 $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$

(v) $4 < x < 5$일 때 $[x] = 4$
$\therefore\ x^2 - 4x - 1 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
$4 < x < 5$이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(i), (ii), (iii), (iv), (v)에서 x의 개수는 4개

37. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a\neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a, b의 합은?

① 12 ② −12 ③ 15 ④ −15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore\ \omega^2=-\omega-2$

$$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$$
$$=(b-a)\omega+(12-2a)$$

$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3,\ 12-2a=0$ ($\because\ \omega$는 허수)

$\therefore\ a=6,\ b=9$

38. $x^2+5xy+ay^2+y-2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2+5xy+ay^2+y-2$를 x에 대해 정리하면

$x^2+5yx+ay^2+y-2$

이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면

판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$D=(25-4a)y^2-4y+8$

$\frac{D'}{4}=4-8(25-4a)=0,$

$4-200+32a=0$

$\therefore\ a=\frac{49}{8}$

39. a, b, c는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$의 해가 α, β일 때, 방정식 $cx^2 - bx + a = 0$의 해를 구하면?

① $\alpha,\ \beta$ ② $-\alpha,\ -\beta$ ③ $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$

④ $-\frac{1}{\alpha},\ -\frac{1}{\beta}$ ⑤ $\alpha,\ -\beta$

해설

$\alpha + \beta = \frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$

$cx^2 - bx + a = 0$에서

$(\text{두 근의 합}) = \frac{b}{c} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\ \left(\because \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}\right)$

$(\text{두 근의 곱}) = \frac{a}{c} = \frac{1}{\alpha\beta}$

따라서 구하는 두 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$이다.

해설

$ax^2 - bx + c = 0$의 양변을 $x^2(\neq 0)$으로 나누면

$a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$

이 때, $\frac{1}{x} = t$라 놓으면, $ct^2 - bt + a = 0$

$t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$

$\therefore\ cx^2 - bx + a = 0$의 해는 $\frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$이다.

40. x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+6k=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2+\overline{\omega}^2=16$이다. 실수 k의 값은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^2+2kx+6k=0$ 이 허근을 가지므로

$\frac{D}{4}=k^2-6k<0,\quad k(k-6)<0$

$\therefore\ 0<k<6$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-2k,\ \omega\overline{\omega}=6k$이므로

$\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}=(-2k)^2-12k$

$=4k^2-12k$

$4k^2-12k=16,$

즉, $k^2-3k-4=0$ 에서

$(k+1)(k-4)=0 \qquad \therefore\ k=-1$ 또는 $k=4$

$0<k<6$ 이므로 $k=4$