

1. 다음은 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일대응인 것은 무엇인가?

① $y = -x^2$

② $y = -|x|$

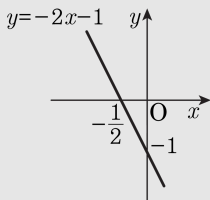
③ $y = 3$

④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = \sqrt{2}x - 2 \ (x \geq 1)$

해설

① $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.



또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

② $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

③ 모든 $x \in X$ 에 대하여 $f(x) = 3$ 이므로
일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) = 3$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

④ 일대일 함수이고 (공역)=(치역)=(실수 전체의 집합) 이므로
일대일대응이다.

⑤ $x \geq 1$ 일 때, $f(X) \geq 0$ 이므로

일대일 함수이지만 (공역) $\neq$ (치역) 이다.

2. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답: 64개

해설

$a \rightarrow \square$, $b \rightarrow \square$, $c \rightarrow \square$

Y 의 원소 p, q, r, s 에서 세 개를 뽑아 위 $\square$ 안에
늘어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.

이 때 세 개의 수는 모두 같거나,
두 개만 같거나 모두 달라도 좋다.

따라서 a 에는 p, q, r, s 의 4가지,
 b 에는 a 에 온 수가 와도 좋으므로 역시 4가지,
마찬가지로 c 에는 a, b 에 온 수가
와도 좋으므로 4가지씩이 있다.

$$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64(\text{개})$$

3. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1, 2, 3, k\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x + 1$ 이 일대일 대응일 때, $a + k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x + 1$ 에서 $f(1) = 4, f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2 + 3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3 \times 3 + 1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2 + 3a, f(k) = a^4$

$f(3) = a^2 + 3a$ 에서 $a^2 + 3a = 10$

$a^2 + 3a - 10 = 0, (a - 2)(a + 5) = 0$

$\therefore a = 2 (\because a \text{는 자연수})$

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k + 1$ 에서 $3k + 1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a + k = 2 + 5 = 7$

4. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 211 개

해설

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로, 전체 함수의 개수에서 $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인 함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

5. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$f: x \rightarrow a|x-1| + (2-a)x + a \quad (x \in R, a \in R)$$

함

수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $a \leq -1$

③ $a > -1$

④ $a < 1$

⑤ $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 에서 $x \geq 1$, $x < 1$ 인 경우로 나누면,

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1) + (2-a)x + a$

$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x) + (2-a)x + a$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면

$x \geq 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

즉, $-2(a-1) > 0$, $a-1 < 0$

$\therefore a < 1$