1. $0<a<b$인 실수, a, b에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $\dfrac{a}{1+a}<\dfrac{b}{1+b}$　　② $\dfrac{a}{1+a}\leq\dfrac{b}{1+b}$

③ $\dfrac{a}{1+a}>\dfrac{b}{1+b}$　　④ $\dfrac{a}{1+a}\geq\dfrac{b}{1+b}$

⑤ $\dfrac{a}{1+a}=\dfrac{b}{1+b}$

해설

$0<a<b$에서 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}\cdots$㉠

㉠의 양변에 1을 더하면

$\dfrac{1}{a}+1>\dfrac{1}{b}+1,\ \dfrac{1+a}{a}>\dfrac{1+b}{b}\cdots$㉡

따라서 ㉡의 역수를 취하면 $\dfrac{a}{1+a}<\dfrac{b}{1+b}$

2. $-1 < x \leqq 2,\ 1 < y \leqq 3$일 때, $a < x-y < b$를 계산하여 $b-a$의 값을 구하면?

① -14 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ -5

해설

$-1 < x \leq 2,\ 1 < y \leq 3$에서

$x-y$의 가장 작은 값은 $-1-3=-4$

가장 큰 값은 $2-1=1$

$\therefore -4 < x-y < 1$이므로 $a=-4,\ b=1$

$b-a=1+4=5$

3. 부등식 $3x+2 \geq 8$을 풀면?

① $x \geq -2$ ② $x \geq -1$ ③ $x \geq -\frac{1}{2}$

④ $x \geq \frac{3}{2}$ ⑤ $x \geq 2$

해설

$3x+2 \geq 8,\ 3x \geq 6 \quad \therefore x \geq 2$

4. 부등식 $ax+1>3x+2a$의 해가 $x<1$일 때, a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(a-3)x>2a-1$이므로
먼저 $a=3$인 경우를 생각하면
(좌변)$=0$, (우변)$=5$가 되어 부등식이 성립하지 않는다.
따라서 $a\neq 3$인 경우만 생각하면 된다.
(i) $a>3$이면 $x>\dfrac{2a-1}{a-3}$이 되어 $x<1$의 형태가 될 수 없다.
(ii) $a<3$이면 $x<\dfrac{2a-1}{a-3}=1$에서 $2a-1=a-3$ $\therefore a=-2$

5. 연립부등식 $\begin{cases} x-4<2x+1 \\ 3x+6 \geq -1+4x \end{cases}$ 를 풀어라.

① $5 < x \leq 7$ ② $-5 < x,\ 7 \leq x$ ③ $-5 < x \leq 7$

④ $-7 \leq x < 5$ ⑤ $-7 \leq x < -5$

해설

$\begin{cases} x-4<2x+1 \\ 3x+6 \geq -1+4x \end{cases}$ $\begin{cases} x > -5 \\ x \leq 7 \end{cases}$

$\therefore\ -5 < x \leq 7$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-2) \le x-2 \\ x+2 > 1 \end{cases}$ 을 풀어라.

① $-2 < x \le 1$　② $1 < x \le 2$　③ $-1 \le x < 2$
④ $1 < x < 2$　⑤ $-1 < x \le 2$

해설

$$\begin{cases} 3(x-2) \le x-2 \\ x+2 > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - x \le -2+6 \\ x > -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x > -1 \end{cases}$$

$\therefore\ -1 < x \le 2$

7. 연립부등식 $-2 < 3x + 4 \le 11$ 를 만족하는 정수를 모두 구하면?

① $-1,\ 0,\ 1$　　② $0,\ 1,\ 2$　　③ $-1,\ 0,\ 1,\ 2$

④ $-2,\ -1,\ 0,\ 1$　　⑤ $0,\ 1,\ 2,\ 3$

해설

$$\begin{cases} -2 < 3x + 4 \\ 3x + 4 \le 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \le \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

따라서 $-2 < x \le \dfrac{7}{3}$ 을 만족하는 정수는 : $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 이다.

8. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 10 개일 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 7x + 4 > 5x \\ 15 - x > a \end{cases}$$

① $3, 4$　② $5, 6$　③ 6　④ $6, 7$　⑤ $4, 5, 6$

해설

$7x + 4 > 5x$

$\therefore\ x > -2$

$15 - x > a$

$\therefore\ x < 15 - a$

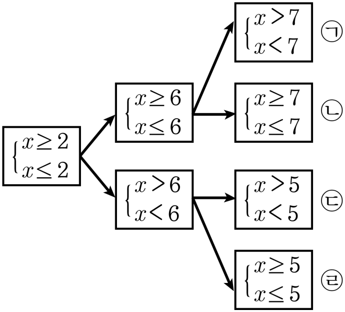
만족하는 정수는 10 개이므로 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ 이다.

$8 < 15 - a \leq 9$

$6 \leq a < 7$

$\therefore\ a = 6$

9. 다음은 해가 각각 다른 연립부등식이다. 출발점의 연립부등식과 같은 해의 개수를 가지는 방향으로 갈 때, 도착하는 곳은 어디인지 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

해설

$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$ 는 해가 한 개이므로 한 개 있는

$\begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq 6 \end{cases}$ 쪽으로 간다.

같은 방법으로 $\begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq 7 \end{cases}$ 쪽으로 가게 된다.

그러므로 도착하는 곳은 ㉡ 이다.

10. 연립부등식 $\begin{cases} 4x-2 \geq -10 \\ 6-x > 3 \end{cases}$ 의 해가 $a \leq x < b$ 일 때, 상수 $a+b$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$6-x>3 \rightarrow x<3$

$4x-2 \geq -10 \rightarrow x \geq -2$

$\therefore\ a+b=-2+3=1$

11. 연립부등식 $\begin{cases} 3x - 1 \geq x + 3 \\ x + 3 < a \end{cases}$ 의 해가 없을때, a 의 값이 될 수 있는 가장 큰 수를 구하여라.

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\begin{cases} 3x - 1 \geq x + 3 \\ x + 3 < a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < a - 3 \end{cases}$$

해가 없으므로 $a - 3 \leq 2$

$\therefore\ a \leq 5$

a 의 최댓값은 5 이다.

12. 어떤 정수에서 10 을 빼고 5 배 하면 20 보다 크고, 어떤 정수에 2 배를 하고 4 를 빼면 28 보다 작다고 한다. 어떤 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

어떤 정수를 x 라고 하고 문제의 조건을 이용하여 두 개의 식을 만들어 본다. '어떤 정수에서 10 을 빼고 5 배하면 20 보다 크고' 를 식으로 표현하면, $5(x-10) > 20$ 이고, '어떤 정수에 2 배를 하고 4 를 빼면 28 보다 작다' 를 식으로 표현하면, $2x-4 < 28$ 이다.

두 개의 부등식을 연립부등식으로 표현하면, $\begin{cases} 5(x-10) > 20 \\ 2x-4 < 28 \end{cases}$

이다. 이를 간단히 하면, $\begin{cases} x > 14 \\ x < 16 \end{cases}$ 따라서 $14 < x < 16$ 이다.

x 는 정수이므로 15 이다.

13. 부등식 $|x-1|+|x+2|<9$를 만족하는 정수 x의 개수는?

① 4개　② 5개　③ 6개　④ 7개　⑤ 8개

해설

(i) $x<-2$일 때

$-(x-1)-(x+2)<9$

$-x+1-x-2<9,\ x>-5$

$\therefore -5<x<2$

(ii) $-2\le x<1$일 때

$-(x+1)+x+2<9,\ -x+1+x+2<9$

$0\cdot x<6$이므로 $-2\le x<1$인 범위의 모든 x는 주어진 부등식의 해가 된다.

$\therefore -2\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

$(x-1)+(x+2)<9,\ x<4$

$\therefore 1\le x<4$

(i), (ii), (iii)에서 해는 $-5<x<4$

따라서 정수는 8개

14. 부등식 $|2x-1| \geq 3$을 풀면?

① $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$

② $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

④ $x < 1$ 또는 $x > 2$

⑤ $x \leq 1$ 또는 $x > 2$

해설

$|2x-1| \geq 3$에서

$2x-1 \leq -3$ 또는 $2x-1 \geq 3$ 정리하면 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

15. 이차부등식 $x^2 + 2x - 35 < 0$을 풀면?

① $-15 < x < 12$　② $-15 < x < 5$　③ $-7 < x < 5$

④ $-7 < x < 2$　⑤ $-5 < x < 7$

해설

$x^2 + 2x - 35 < 0$에서 $(x+7)(x-5) < 0$

$\therefore -7 < x < 5$

16. 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식 $x^2+x-6>0$을 풀면?

① $x<-3$ 또는 $x>2$

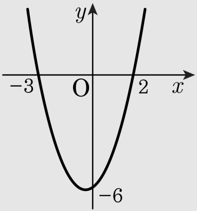
② $x<-2$ 또는 $x>3$

③ $x<-1$ 또는 $x>4$

④ $x<0$ 또는 $x>5$

⑤ $x<1$ 또는 $x>6$

해설



이차방정식 $x^2+x-6=0$ 에서 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$f(x)=x^2+x-6$ 으로 놓으면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

이차부등식 $f(x)>0$의 해는 $x<-3$ 또는 $x>2$

17. 연립부등식 $\begin{cases} 3x^2+4x-4 \geq 0 \\ (x+1)^2 < 4 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x \leq -1,\ \frac{2}{3} < x < 1$

② $-1 < x \leq -3,\ \frac{2}{3} \leq x < 2$

③ $-2 < x \leq 0,\ \frac{1}{3} < x < 1$

④ $-3 < x \leq -2,\ \frac{2}{3} \leq x < 1$

⑤ $-4 < x \leq -2,\ \frac{1}{3} < x < 1$

해설

$$\begin{cases} 3x^2+4x-4 \geq 0 \cdots \text{(가)} \\ (x+1)^2 < 4 \cdots \text{(나)} \end{cases}$$

(가)에서 $(x+2)(3x-2) \geq 0$이므로

$x \leq -2$ 또는 $x \geq \frac{2}{3}$

(나)에서 $-2 < x+1 < 2$,

$-3 < x < 1$이므로

$-3 < x \leq -2,\ \frac{2}{3} \leq x < 1$

18. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+1 \geq \frac{1}{2}x-4 \\ 4x-4 < x+2 \end{cases}$ 를 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 정수를 a , 가장 큰 정수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$3x+1 \geq \frac{1}{2}x-4$ 의 양변에 2를 곱하면

$6x+2 \geq x-8$

$5x \geq -10$

$x \geq -2$

$4x-x < 2+4$

$3x < 6$, $x < 2$

그러므로 $-2 \leq x < 2$

$a+b = (-2)+1 = -1$

19. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는가?

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

자두의 개수 : $(9-x)$ 개 , 복숭아의 개수 : x 개

$2800 \le 200(9-x)+500x \le 3600$

$$\begin{cases} 2800 \le 200(9-x)+500x \\ 200(9-x)+500x \le 3600 \end{cases}$$

$\therefore\ \frac{10}{3} \le x \le 6$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

20. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \leq 0$의 해를 구하면?

① $x \geq 3$ 또는 $x \leq -3$

② x는 모든 실수

③ $x \neq 3$인 모든 실수

④ $x = 3$

⑤ 해가 없다

해설

$x^2 - 6x + 9 \leq 0$

$(x - 3)^2 \leq 0$

$\Rightarrow x = 3$

21. 부등식 $x^2 - kx + 2 > 0$이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 범위를 구하면 $a < k < b$이다. 이 때, ab의 값은?

① -10 ② -9 ③ -8 ④ -7 ⑤ -6

해설

$x^2 - kx + 2 > 0$이 항상 성립하려면
판별식이 실근을 갖지 않을 때이므로
$D = k^2 - 4 \cdot 2 < 0$
$k^2 - 8 < 0,\ \left(k - 2\sqrt{2}\right)\left(k + 2\sqrt{2}\right) < 0$
$\therefore -2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$
따라서 $a = -2\sqrt{2},\ b = 2\sqrt{2}$이므로
$ab = -2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = -8$

22. 이차부등식 $x^2 - 2kx + 2k \le 0$이 해를 갖지 않을 때, 실수 k값의 범위는?

① $-1 \le k \le 0$ ② $-2 < k < 0$

③ $0 \le x \le 2$ ④ $0 < k < 2$

⑤ $k < 0,$ 또는$k > 2$

해설

주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면
방정식 $x^2 - 2kx + 2k = 0$이 허근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2k < 0,\quad k(k-2) < 0$$

$\therefore 0 < k < 2$

23. 부등식 $x^2+x+m \geq 0$의 x의 값에 관계없이 성립할 때, 실수 m의 최솟값은?

① -4 ② 0 ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$x^2+x+m \geq 0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x^2+x+m=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=1^2-4m \leq 0 \quad \therefore m \geq \frac{1}{4}$

따라서 실수 m의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

24. 모든 실수 x에 대하여 $a(x^2+2x+2) \geq 2x^2+4x+5$가 성립할 때 a의 최솟값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$a(x^2+2x+2) \geq 2x^2+4x+5$에서
$(a-2)x^2+2(a-2)x+(2a-5) \geq 0$
이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로
$a-2>0 \cdots$ ㉠
판별식 $\dfrac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)(2a-5) \leq 0$이므로
$a^2-4a+4-(2a^2-9a+10)$
$=a^2-4a+4-2a^2+9a-10$
$=-a^2+5a-6$
$=-(a^2-5a+6)$
$=-(a-2)(a-3) \leq 0$
따라서 $(a-2)(a-3) \geq 0$이므로
$a \leq 2$ 또는 $a \geq 3 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a \geq 3$
따라서 a의 최솟값은 3

25. 이차부등식 $ax^2 + 4x + a < 0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a < -2$　　② $a < 0$　　③ $a < 2$

④ $a < 4$　　⑤ $a < 8$

해설

$ax^2 + 4x + a < 0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립하려면

i) $a < 0$

ii) $ax^2 + 4x + a = 0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4} = 2^2 - a^2 < 0$$

$a^2 - 4 > 0, (a+2)(a-2) > 0$

$\therefore a < -2$ 또는 $a > 2$

i), ii) 의 공통 범위를 구하면 $a < -2$

26. $a(x^2-2x+2)>2x$을 만족하는 x가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a\le 1-\sqrt{2}$ ② $a\le 1$ ③ $a\le 1+\sqrt{2}$

④ $0<a\le 1$ ⑤ $0<a\le\sqrt{2}$

해설

모든 실수 x에서 $ax^2-2(a+1)x+2a\le 0$

ⅰ) $a\le 0$

ⅱ) $D/4=(a+1)^2-2a^2=-a^2+2a+1\le 0$

$a^2-2a-1\ge 0$

$\therefore a\le 1-\sqrt{2}$ 또는 $a\ge 1+\sqrt{2}$

$\therefore a\le 1-\sqrt{2}$

27. $x^2-2ax+2a+3<3$을 만족하는 x가 없도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1개 ② 3개 ③ 5개 ④ 7개 ⑤ 9개

해설

$x^2-2ax+2a+3<0$의 해가 존재하지 않으려면
모든 실수 x에 대하여
$x^2-2ax+2a+3\geq 0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=a^2-(2a+3)\leq 0,\ (a-3)(a+1)\leq 0$
$\therefore -1\leq a\leq 3$
따라서, 구하는 정수 a의 개수는
$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 5개이다.

28. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$의 해가 $-4 < x < 2$일 때, a의 값을 구하여라.(단, a는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로

$(x+4)(x-2) < 0$

$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$

$\therefore a = -8$

29. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$일 때 부등식 $cx^2-bx-a>0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-2<x<1$ 이므로 $a<0$
해가 $-2<x<1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1)<0$,
즉 $x^2+x-2<0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2+ax-2a>0$ 이 부등식이
$ax^2+bx+c>0$ 과 같으므로
$b=a, c=-2a\cdots$(가)
(가)를 $cx^2-bx-a>0$ 에 대입하면
$-2ax^2-ax-a>0$, $2x^2+x+1>0(\because -a>0)$
이 때 방정식 $2x^2+x+1=0$ 의 판별식
$D=1^2-4\cdot2=-7<0$ 이므로
$2x^2+x+1>0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1,2,3,\cdots,9$ 의 9개이다.

30. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면

$-8 \le x^2-8 \le 8$

$0 \le x^2 \le 16$

$\therefore -4 \le x \le 4$

$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면

$-k<x-2<k$

$-k+2<x<k+2$

이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면

$-k+2 \ge -4,\ k+2 \le 4$이어야 하므로

$k \le 6,\ k \le 2$

$\therefore 0<k \le 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

31. $ax^2-2ax+3<0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a>0$　② $-1<a<3$　③ $0\le a\le 3$

④ $-1<a<4$　⑤ $-1\le a\le 4$

해설

(i) $a=0$일 때, 성립한다.

(ii) $a\neq 0$일 때, 함수 $y=ax^2-2ax+3$에서 $D\le 0$이므로

$a^2-3a\le 0$

$\therefore 0<a\le 3(\because a\neq 0)$

32. 다음 부등식을 동시에 만족하는 정수 x의 개수는?

$$x^2 < 3x + 40 \ , \ 3x^2 - 7x \geq 40$$

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$x^2 < 3x + 40$, $x^2 - 3x - 40 < 0$,

$(x-8)(x+5) < 0$, $-5 < x < 8$

$3x^2 - 7x \geq 40$, $3x^2 - 7x - 40 \geq 0$

$(3x+8)(x-5) \geq 0$,

$x \geq 5$ 또는 $x \leq -\dfrac{8}{3}$ $\rightarrow$

공통범위는 $-5 < x \leq -\dfrac{8}{3}$, $5 \leq x < 8$

정수는 -4, -3, 5, 6, 7 : 5개이다.

33. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단,$a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a\cdots\cdots$ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$