1. 420 에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱을 만들려고 한다. 이 때, 곱할 수 있는 가장 작은 네 자리의 자연수는?

① 1024 ② 1280 ③ 1440 ④ 1680 ⑤ 2048

해설

$420 \times n = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times n = m^2$ 이라 하면

가장 작은 $n = 3 \times 5 \times 7$

따라서 n 은

$$3 \times 5 \times 7 \times 1^2 = 105$$

$$3 \times 5 \times 7 \times 2^2 = 420$$

$$3 \times 5 \times 7 \times 3^2 = 945$$

$$3 \times 5 \times 7 \times 4^2 = 1680$$

그러므로 가장 작은 네 자리의 자연수 n 은 1680 이다.

2. $\frac{n}{2}$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{3}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 432

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $\frac{n}{2}$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 네 번 곱해져 있고, $\frac{n}{3}$ 이 제곱이므로 n 은 3 이 세 번 곱해져 있다.
 $\therefore n = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 432$

3. 450을 588보다 작은 자연수 a 로 나누었더니 약수의 개수가 홀수인 자연수 b 가 되었다. 가능한 b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 260

해설

약수의 개수가 홀수인 수는 제곱수이므로

$$\frac{450}{a} = \frac{2 \times 3^2 \times 5^2}{a} = k^2 = b \text{라 하면}$$

a 는 $2, 2 \times 3^2, 2 \times 5^2, 2 \times 3^2 \times 5^2$ 이 가능하다.

$$a = 2 \text{일 때, } b = 15^2 = 225$$

$$a = 2 \times 3^2 \text{일 때, } b = 5^2 = 25$$

$$a = 2 \times 5^2 \text{일 때, } b = 3^2 = 9$$

$$a = 2 \times 3^2 \times 5^2 \text{일 때, } b = 1^2 = 1 \therefore 225 + 25 + 9 + 1 = 260$$

4. 두 자연수의 곱이 768 이고 최소공배수가 96 일 때, 두 수의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 수 A, B 의 최대공약수를 G , 최소공배수를 L 이라 하면
 $A \times B = L \times G$ 이므로
 $768 = 96 \times G$ 이다.
 $\therefore G = 8$

5. 두 자연수 A, B 의 최대공약수가 5이고, $\frac{A}{B} = \frac{7}{8}$ 일 때, 두 자연수 A, B 의 최소공배수는?

- ① 280 ② 350 ③ 420 ④ 490 ⑤ 560

해설

A 와 B 의 최대공약수가 5이고 $\frac{A}{B} = \frac{7}{8}$ 이므로, $A = 35 = 5 \times 7$,
 $B = 40 = 2^3 \times 5$ 이다.
따라서 A 와 B 의 최소공배수는 $2^3 \times 5 \times 7 = 280$ 이다.

6. 두 수의 곱이 $2^3 \times 3^5 \times 7^2$ 이고, 최대공약수가 $2 \times 3^2 \times 7$ 일 때, 두 수의 최소공배수는?

- ① $2 \times 3 \times 7$ ② $2^2 \times 3^3 \times 7$ ③ $2 \times 3^2 \times 7$
④ $2 \times 3^3 \times 7$ ⑤ $2 \times 3 \times 7^2$

해설

(두 수의 곱) = (최대공약수) × (최소공배수) 이므로
 $2^3 \times 3^5 \times 7^2 = 2 \times 3^2 \times 7 \times (\text{최소공배수})$
최소공배수는 $2^2 \times 3^3 \times 7$ 이다.

7. 자연수 N 을 3, 4, 5, 6 으로 각각 나누면 나머지가 모두 1 이다. 이를 만족하는 자연수 N 중에서 100 에 가장 가까운 수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 121

해설

구하는 수를 N 이라 하면 $N - 1$ 은 3, 4, 5, 6 의 공배수이다. 3, 4, 5, 6 의 최소공배수는 60 이므로 60 의 배수 중 100 에 가장 가까운 수는 120 이다. 이때 $N - 1 = 120$ 이다. 따라서 $N = 121$ 이다.

8. 세 자연수 4, 5, 6 중 어느 것으로 나누어도 나머지가 3인 자연수 중에서 가장 작은 것은?

- ① 60 ② 63 ③ 120 ④ 123 ⑤ 180

해설

구하는 수는 (4, 5, 6의 최소공배수) + 3
4, 5, 6의 최소공배수는 60 이므로
 $60 + 3 = 63$ 이다.

9. 9로 나누면 나머지가 8, 8로 나누면 나머지가 7, 7로 나누면 나머지가 6, 6으로 나누면 나머지가 5, 5로 나누면 나머지가 4인 자연수 중에서 최소의 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2519

해설

조건을 만족하는 수는
(9, 8, 7, 6, 5의 공배수)-1의 꼴이고
9, 8, 7, 6, 5의 최소공배수는 2520이다.
따라서 최소의 자연수는 $2520 - 1 = 2519$ 이다.

10. 두 분수 $\frac{1}{16}, \frac{1}{6}$ 중 어느 것을 곱해도 자연수가 되는 수 중 두 번째로 큰 자연수는?

- ① 16 ② 32 ③ 48 ④ 96 ⑤ 114

해설

구하는 수는 16 과 6 의 공배수이다.
16 와 6 의 공배수는 16 와 6 의 최소공배수인 48 의 배수이므로
48, 96, 144, ... 이다.

11. 두 분수 $\frac{15}{16}$, $\frac{5}{12}$ 의 어느 것에 곱해도 그 결과가 자연수가 되는 분수 중에서 가장 작은 기약분수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{48}{5}$

해설

$$\frac{(16, 12 \text{의 최소공배수})}{(15, 5 \text{의 최대공약수})} = \frac{48}{5}$$

12. $\frac{28}{5}$ 과 $\frac{35}{8}$ 의 어느 것에 곱하여도 자연수가 되는 분수 중 가장 작은 수는?

- ① $\frac{32}{7}$ ② $\frac{36}{7}$ ③ $\frac{40}{7}$ ④ $\frac{41}{7}$ ⑤ $\frac{43}{7}$

해설

구하는 기약 분수를 $\frac{a}{b}$ 로 놓으면

$a = 40, b = 7$ 이므로 $\frac{a}{b} = \frac{40}{7}$

13. 다음 중 약수의 개수가 가장 큰 것을 고르면?

① $2^4 \times 3^2$

② $2 \times 5 \times 7$

③ $2 \times 3 \times 5 \times 7$

④ $2^2 \times 3^3 \times 7$

⑤ $11^2 \times 13^2$

해설

① 15 개 ② 8 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 9 개

14. 자연수 n 에 대하여 n 부터 연속하는 5 개의 자연수의 곱을 $[n]$, n 의 약수의 개수를 $s(n)$ 로 정의한다. $\frac{s([n+1])}{s([n])} < 1$ 을 만족하는 10보다 작은 자연수 n 을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 7

해설

1 부터 13 까지 자연수를 소인수분해해보면
 $1, 2, 3, 4 = 2^2, 5, 6 = 2 \times 3, 7, 8 = 2^3, 9 = 3^2, 10 = 2 \times 5, 11, 12 = 2^2 \times 3, 13$ 이다.

즉, $[1] = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이고, $s([1]) = s(2^3 \times 3 \times 5)$
약수의 개수를 구하면 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 이다. 차례대로 값을 구하면
 $s([1]) = 16, s([2]) = 30, s([3]) = 56, s([4]) = 112, s([5]) = 144,$
 $s([6]) = 96, s([7]) = 120, s([8]) = 112, s([9]) = 128, s([10]) = 160$

따라서, $\frac{s([n+1])}{s([n])} < 1$ 인 경우는 $s([n+1]) < s([n])$ 이므로 n 의 값은 5, 7이다.

15. 다음 수들을 약수의 개수가 적은 것부터 차례로 번호를 써라.

1) 16 2) 50 3) 42 4) $5^3 \times 7^2$

▶ 답:

▷ 정답: 1, 2, 3, 4

해설

1) $16 = 2^4$

약수의 개수는 $4 + 1 = 5$ (개)

2) $50 = 2 \times 5^2$

약수의 개수는 $(1 + 1) \times (2 + 1) = 6$ (개)

3) $42 = 2 \times 3 \times 7$

약수의 개수는 $(1 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 8$ (개)

4) $5^3 \times 7^2$

약수의 개수는 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개)

16. 두 수 $3^a \times 5 \times 11^2$, $3^2 \times 7^b \times 11^c$ 의 최소공배수를 구하면 $3^4 \times 5 \times 7^3 \times 11^3$ 이다. $a + b - c$ 의 값으로 옳은 것은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$3^a = 3^4$ 이므로 $a = 4$,
 $7^b = 7^3$ 이므로 $b = 3$,
 $11^c = 11^3$ 이므로 $c = 3$ 이다.
따라서 $a + b - c = 4$ 이다.

17. 두 수 $2^a \times 3 \times 5$, $2 \times 5^b \times 7^c$ 의 최소공배수를 구하면 $2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2$ 이다. $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$2^a = 2 \text{ 이므로 } a = 1$$

$$5^b = 5^2 \text{ 이므로 } b = 2$$

$$7^c = 7^2 \text{ 이므로 } c = 2 \text{ 따라서 } a + b + c = 5$$

18. 두 자연수 30 과 A 의 최소공배수가 $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 일 때, A 가 될 수 있는 수를 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $2^2 \times 3^2 \times 7$

▷ 정답: $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

해설

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$A = a \times b \times c \times d$ 라 하면

$$\frac{2 \times 3 \times 5}{a \times b \times c \times d} \\ 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

$\therefore a = 2^2, b = 3^2, c = 1$ 또는 $5, d = 7$

따라서 A 는 $2^2 \times 3^2 \times 7, 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 의 2 개이다.

19. 세 자연수 $4a$, $6a$, $16a$ 의 최소공배수가 336 일 때, 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$2^2 \times a, 2 \times 3 \times a, 2^4 \times a$$

최소공배수는 $2^4 \times 3 \times a = 336 = 2^4 \times 3 \times 7$ 이다.

$$\therefore a = 7$$

20. 세 자연수의 비가 $2:3:8$ 이고 최소공배수가 144 일 때, 세 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 12

▷ 정답: 18

▷ 정답: 48

해설

세 자연수의 비가 $2:3:8$ 이므로 세 자연수는 각각 $2 \times a$, $3 \times a$, $8 \times a$ 로 나타낼 수 있다.

또한 최소공배수는 $2^3 \times 3 \times a = 144 = 2^4 \times 3^2$ 으로 나타낼 수 있으므로 $a = 2 \times 3 = 6$ 이다.

따라서 세 자연수는 각각 $12 = 2 \times 6$, $18 = 3 \times 6$, $48 = 8 \times 6$ 이다.

21. 세 자연수의 비가 $3 : 6 : 10$ 이고 최소공배수가 360 일 때, 나눗셈을 이용하여 세 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

▷ 정답 : 72

▷ 정답 : 120

해설

세 자연수의 비가 $3 : 6 : 10$ 이므로 원래의 세 자연수를 $3 \times a, 6 \times a, 10 \times a$ 라고 하면

$$\begin{array}{r} a) \ 3 \times a \quad 6 \times a \quad 10 \times a \\ 2) \ 3 \quad 6 \quad 10 \\ 3) \ 3 \quad 3 \quad 5 \\ \hline \quad 1 \quad 1 \quad 5 \end{array}$$

최소공배수는 $a \times 2 \times 3 \times 5 = 30 \times a$ 이다.

세 수의 최소공배수가 360 이므로 $30 \times a = 360$ 이고, a 는 12 이다.

따라서 세 자연수는 $3 \times 12 = 36, 6 \times 12 = 72, 10 \times 12 = 120$ 이다.

22. 자연수 A 와 36 의 최대공약수가 4 이고 최소공배수는 144 일 때, 자연수 A 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$4) \frac{A}{a} \frac{36}{9}$$

A 와 36 의 최소공배수가 144 이므로

$$4 \times a \times 9 = a \times 36 = 144$$

$$a = 144 \div 36 = 4$$

$$\therefore A = 4 \times 4 = 16$$

[별해] 두 자연수 A, B 의 최대공약수와 최소공배수의 곱은 두 자연수의 곱인 $A \times B$ 와 같다.

$$A \times 36 = 4 \times 144$$

$$\therefore A = 4 \times 144 \div 36 = 16$$

23. 최대공약수가 18 이고, 최소공배수가 108 인 두 수의 차가 18 일 때, 두 수의 합은 얼마인가?

- ① 72 ② 90 ③ 108 ④ 126 ⑤ 144

해설

$A = 18a, B = 18b$
(a, b 는 서로소, $a < b$)로 놓으면
 $108 = 18 \times a \times b, a \times b = 6$ 이다.
(a, b) = (1, 6), (2, 3)
이때 (A, B) = (18, 108), (36, 54)
두 수의 차가 18 인 경우는 (36, 54)
따라서 두 수의 합은 90 이다.

24. 두 자연수 A, B 의 최대공약수는 9, 최소공배수는 360 이고, $A+B = 117$ 일 때, $A-B$ 를 구하여라. (단, $A > B$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$A = 9a, B = 9b$ 라고 하면
(단, a, b 는 서로소, $a > b$)
최소공배수 $360 = 9 \times 40 = 9 \times a \times b$ 이다.
 $a \times b = 40$ 이고 $A > B$ 이므로
 $a = 40, b = 1$ 일 때 $A = 360, B = 9$,
 $a = 20, b = 2$ 일 때 $A = 180, B = 18$,
 $a = 10, b = 4$ 일 때 $A = 90, B = 36$,
 $a = 8, b = 5$ 일 때 $A = 72, B = 45$,
 $A + B = 117$ 이므로 $A = 72, B = 45$ 이다.
 $\therefore A - B = 27$