1. 420 에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱을 만들려고 한다. 이 때, 곱할 수 있는 가장 작은 네 자리의 자연수는?

① 1024 ② 1280 ③ 1440 ④ 1680 ⑤ 2048

해설

$420 \times n = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times n = m^2$ 이라 하면

가장 작은 $n = 3 \times 5 \times 7$

따라서 n 은

$3 \times 5 \times 7 \times 1^2 = 105$

$3 \times 5 \times 7 \times 2^2 = 420$

$3 \times 5 \times 7 \times 3^2 = 945$

$3 \times 5 \times 7 \times 4^2 = 1680$

그러므로 가장 작은 네 자리의 자연수 n 은 1680 이다.

2. $\frac{n}{2}$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{3}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 432

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $\frac{n}{2}$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 네 번 곱해져 있고, $\frac{n}{3}$ 이 제곱이므로 n 은 3 이 세 번 곱해져 있다.

$\therefore n = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 432$

3. 450을 588보다 작은 자연수 a로 나누었더니 약수의 개수가 홀수인 자연수 b가 되었다. 가능한 b의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 260

해설

약수의 개수가 홀수인 수는 제곱수이므로

$\frac{450}{a} = \frac{2 \times 3^2 \times 5^2}{a} = k^2 = b$라 하면

a는 2, 2×3^2, 2×5^2, $2 \times 3^2 \times 5^2$이 가능하다.

$a = 2$일 때, $b = 15^2 = 225$

$a = 2 \times 3^2$일 때, $b = 5^2 = 25$

$a = 2 \times 5^2$일 때, $b = 3^2 = 9$

$a = 2 \times 3^2 \times 5^2$일 때, $b = 1^2 = 1$ $\therefore 225 + 25 + 9 + 1 = 260$

4. 두 자연수의 곱이 768 이고 최소공배수가 96 일 때, 두 수의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 수 A, B 의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L 이라 하면
$A \times B = L \times G$ 이므로
$768 = 96 \times G$ 이다.
$\therefore\ G = 8$

5. 두 자연수 A, B 의 최대공약수가 5이고, $\frac{A}{B} = \frac{7}{8}$ 일 때, 두 자연수 A, B 의 최소공배수는?

① 280　② 350　③ 420　④ 490　⑤ 560

해설

A 와 B 의 최대공약수가 5 이고 $\frac{A}{B} = \frac{7}{8}$ 이므로, $A = 35 = 5 \times 7$, $B = 40 = 2^3 \times 5$ 이다.

따라서 A 와 B 의 최소공배수는 $2^3 \times 5 \times 7 = 280$ 이다.

6. 두 수의 곱이 $2^3 \times 3^5 \times 7^2$ 이고, 최대공약수가 $2 \times 3^2 \times 7$ 일 때, 두 수의 최소공배수는?

① $2 \times 3 \times 7$
② $2^2 \times 3^3 \times 7$
③ $2 \times 3^2 \times 7$
④ $2 \times 3^3 \times 7$
⑤ $2 \times 3 \times 7^2$

해설

(두 수의 곱)=(최대공약수)×(최소공배수) 이므로

$2^3 \times 3^5 \times 7^2 = 2 \times 3^2 \times 7 \times$ (최소공배수)

최소공배수는 $2^2 \times 3^3 \times 7$ 이다.

7. 자연수 N 을 $3, 4, 5, 6$ 으로 각각 나누면 나머지가 모두 1 이다. 이를 만족하는 자연수 N 중에서 100 에 가장 가까운 수를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 121

해설

구하는 수를 N 이라 하면 $N-1$ 은 $3, 4, 5, 6$ 의 공배수이다.
$3, 4, 5, 6$ 의 최소공배수는 60 이므로 60 의 배수 중 100 에 가장 가까운 수는 120 이다. 이때 $N-1=120$ 이다.
따라서 $N=121$ 이다.

8. 세 자연수 4, 5, 6 중 어느 것으로 나누어도 나머지가 3 인 자연수 중에서 가장 작은 것은?

① 60 ② 63 ③ 120 ④ 123 ⑤ 180

해설

구하는 수는 (4, 5, 6의 최소공배수) + 3
4, 5, 6 의 최소공배수는 60 이므로
$60 + 3 = 63$ 이다.

9. 9 로 나누면 나머지가 8, 8 로 나누면 나머지가 7, 7 로 나누면 나머지가 6, 6 으로 나누면 나머지가 5, 5 로 나누면 나머지가 4 인 자연수 중에서 최소의 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2519

해설

조건을 만족하는 수는
(9, 8, 7, 6, 5 의 공배수)-1 의 꼴이고
9, 8, 7, 6, 5 의 최소공배수는 2520 이다.
따라서 최소의 자연수는 $2520 - 1 = 2519$ 이다.

10. 두 분수 $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{6}$ 중 어느 것을 곱해도 자연수가 되는 수 중 두 번째로 큰 자연수는?

① 16 ② 32 ③ 48 ④ 96 ⑤ 114

해설

구하는 수는 16 과 6 의 공배수이다.
16 와 6 의 공배수는 16 와 6 의 최소공배수인 48 의 배수이므로
48, 96, 144, $\cdots$ 이다.

11. 두 분수 $\frac{15}{16}$, $\frac{5}{12}$ 의 어느 것에 곱해도 그 결과가 자연수가 되는 분수 중에서 가장 작은 기약분수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{48}{5}$

해설

$$\frac{(16,\ 12\text{의 최소공배수})}{(15,\ 5\text{의 최대공약수})} = \frac{48}{5}$$

12. $\dfrac{28}{5}$ 과 $\dfrac{35}{8}$ 의 어느 것에 곱하여도 자연수가 되는 분수 중 가장 작은 수는?

① $\dfrac{32}{7}$ ② $\dfrac{36}{7}$ ③ $\dfrac{40}{7}$ ④ $\dfrac{41}{7}$ ⑤ $\dfrac{43}{7}$

해설

구하는 기약 분수를 $\dfrac{a}{b}$ 로 놓으면

$a = 40,\ b = 7$ 이므로 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{40}{7}$

13. 다음 중 약수의 개수가 가장 큰 것을 고르면?

① $2^4 \times 3^2$ ② $2 \times 5 \times 7$ ③ $2 \times 3 \times 5 \times 7$

④ $2^2 \times 3^3 \times 7$ ⑤ $11^2 \times 13^2$

해설

① 15 개② 8 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 9 개

14. 자연수 n에 대하여 n부터 연속하는 5 개의 자연수의 곱을 $[n]$, n 의 약수의 개수를 $s(n)$ 로 정의한다. $\dfrac{s([n+1])}{s([n])} < 1$ 을 만족하는 10 보다 작은 자연수 n 을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 7

해설

1 부터 13 까지 자연수를 소인수분해해보면
$1,\ 2,\ 3,\ 4 = 2^2,\ 5,\ 6 = 2\times3,\ 7,\ 8 = 2^3,\ 9 = 3^2,\ 10 = 2\times5,\ 11,\ 12 = 2^2\times3,\ 13$ 이다.
즉, $[1] = 1\times2\times3\times4\times5 = 2^3\times3\times5$ 이고, $s([1]) = s(2^3\times3\times5)$ 약수의 개수를 구하면 $4\times2\times2 = 16$ 이다. 차례대로 값을 구하면
$s([1]) = 16,\ s([2]) = 30,\ s([3]) = 56\ s([4]) = 112,\ s([5]) = 144,\ s([6]) = 96,\ s([7]) = 120,\ s([8]) = 112,\ s([9]) = 128,\ s([10]) = 160$
따라서, $\dfrac{s([n+1])}{s([n])} < 1$ 인 경우는 $s([n+1]) < s([n])$ 이므로 n 의 값은 5, 7 이다.

15. 다음 수들을 약수의 개수가 적은 것부터 차례로 번호를 써라.

1) 16   2) 50   3) 42   4) $5^3 \times 7^2$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $1, 2, 3, 4$

해설

1) $16 = 2^4$
약수의 개수는$4 + 1 = 5$(개)
2) $50 = 2 \times 5^2$
약수의 개수는 $(1 + 1) \times (2 + 1) = 6$(개)
3) $42 = 2 \times 3 \times 7$
약수의 개수는 $(1 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 8$(개)
4) $5^3 \times 7^2$
약수의 개수는 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$(개)

16. 두 수 $3^a \times 5 \times 11^2$, $3^2 \times 7^b \times 11^c$ 의 최소공배수를 구하면 $3^4 \times 5 \times 7^3 \times 11^3$ 이다. $a+b-c$ 의 값으로 옳은 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$3^a = 3^4$ 이므로 $a = 4$,
$7^b = 7^3$ 이므로 $b = 3$,
$11^c = 11^3$ 이므로 $c = 3$ 이다.
따라서 $a+b-c = 4$ 이다.

17. 두 수 $2^a \times 3 \times 5$, $2 \times 5^b \times 7^c$ 의 최소공배수를 구하면 $2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2$ 이다. $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2^a = 2$ 이므로 $a = 1$
$5^b = 5^2$ 이므로 $b = 2$
$7^c = 7^2$ 이므로 $c = 2$ 따라서 $a+b+c = 5$

18. 두 자연수 30 과 A 의 최소공배수가 $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 일 때, A 가 될 수 있는 수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $2^2 \times 3^2 \times 7$

▷ 정답 : $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

해설

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$A = a \times b \times c \times d$ 라 하면

$$\begin{array}{l} \ \ 2 \ \times 3 \ \times 5 \\ \underline{\ \ a \ \times b \ \times c \times d} \\ \ \ 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \end{array}$$

$\therefore\ a = 2^2,\ b = 3^2,\ c = 1$ 또는 $5,\ d = 7$

따라서 A 는 $2^2 \times 3^2 \times 7,\ 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 의 2 개이다.

19. 세 자연수 $4a,\ 6a,\ 16a$ 의 최소공배수가 336 일 때, 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$2^2 \times a,\ 2 \times 3 \times a,\ 2^4 \times a$

최소공배수는 $2^4 \times 3 \times a = 336 = 2^4 \times 3 \times 7$ 이다.

$\therefore\ a = 7$

20. 세 자연수의 비가 $2:3:8$ 이고 최소공배수가 144 일 때, 세 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

▷ 정답 : 18

▷ 정답 : 48

해설

세 자연수의 비가 $2:3:8$ 이므로 세 자연수는 각각 $2\times a,\ 3\times a,\ 8\times a$ 로 나타낼 수 있다.
또한 최소공배수는 $2^3\times3\times a=144=2^4\times3^2$ 으로 나타낼 수 있으므로 $a=2\times3=6$ 이다.
따라서 세 자연수는 각각 $12=2\times6,\ 18=3\times6,\ 48=8\times6$ 이다.

21. 세 자연수의 비가 $3:6:10$ 이고 최소공배수가 360 일 때, 나눗셈을 이용하여 세 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

▷ 정답 : 72

▷ 정답 : 120

해설

세 자연수의 비가 $3:6:10$이므로 원래의 세 자연수를 $3\times a, 6\times a, 10\times a$ 라고 하면

$$\begin{array}{r|ccc} a & 3\times a & 6\times a & 10\times a \\ \hline 2 & 3 & 6 & 10 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 5 \\ \hline & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

최소공배수는 $a\times 2\times 3\times 5 = 30\times a$ 이다.
세 수의 최소공배수가 360 이므로 $30\times a = 360$ 이고, a 는 12 이다.
따라서 세 자연수는 $3\times 12 = 36, 6\times 12 = 72, 10\times 12 = 120$ 이다.

22. 자연수 A 와 36 의 최대공약수가 4 이고 최소공배수는 144 일 때, 자연수 A 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{array}{r|cc} 4 & A & 36 \\ \hline & a & 9 \end{array}$$

A 와 36 의 최소공배수가 144 이므로

$4 \times a \times 9 = a \times 36 = 144$

$a = 144 \div 36 = 4$

$\therefore\ A = 4 \times 4 = 16$

[별해] 두 자연수 $A,\ B$ 의 최대공약수와 최소공배수의 곱은 두 자연수의 곱인 $A \times B$ 와 같다.

$A \times 36 = 4 \times 144$

$\therefore\ A = 4 \times 144 \div 36 = 16$

23. 최대공약수가 18 이고, 최소공배수가 108 인 두 수의 차가 18 일 때, 두 수의 합은 얼마인가?

① 72　② 90　③ 108　④ 126　⑤ 144

해설

$A = 18a,\ B = 18b$

$(a,\ b$는 서로소, $a < b)$로 놓으면

$108 = 18 \times a \times b,\ a \times b = 6$ 이다.

$(a,\ b) = (1,\ 6),\ (2,\ 3)$

이때 $(A,\ B) = (18,\ 108),\ (36,\ 54)$

두 수의 차가 18 인 경우는 $(36,\ 54)$

따라서 두 수의 합은 90 이다.

24. 두 자연수 A, B 의 최대공약수는 9, 최소공배수는 360 이고, $A+B=117$ 일 때, $A-B$ 를 구하여라. (단, $A>B$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$A=9a,\ B=9b$ 라고 하면
(단, $a,\ b$ 는 서로소, $a>b$)
최소공배수 $360=9\times40=9\times a\times b$ 이다.
$a\times b=40$ 이고 $A>B$ 이므로
$a=40,\ b=1$ 일 때 $A=360,\ B=9,$
$a=20,\ b=2$ 일 때 $A=180,\ B=18,$
$a=10,\ b=4$ 일 때 $A=90,\ B=36,$
$a=8,\ b=5$ 일 때 $A=72,\ B=45,$
$A+B=117$ 이므로 $A=72,\ B=45$ 이다.
$\therefore\ A-B=27$