1. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$의 해가 존재하지 않기 위한 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$이면 해가 없다.

2. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$ 의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, $x=2$

② $a \neq 2$ 일 때, $x=a$

③ $a=2$ 일 때, 불능

④ $a=0$ 일 때, 부정

⑤ 해는 없다.

해설

$(a-2)(x-a)=0$

$\Rightarrow \quad a=2$ 또는 $x=a$

ⅰ) $a=2$ 일 때 : 부정

ⅱ) $a \neq 2$ 일 때 : $x=a$

3. $|x+1|+|x-2|=x+3$을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

ⅰ) $x<-1$일 때,

$-x-1-x+2=x+3$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ (모순)

ⅱ) $-1\le x<2$일 때,

$x+1-x+2=x+3$

$\therefore\ x=0$

ⅲ) $x\ge 2$일 때,

$x+1+x-2=x+3$

$\therefore\ x=4$

4. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

① 0　　② ± 1　　③ $\pm\sqrt{2}$　　④ $\pm\sqrt{3}$　　⑤ ± 2

해설

(i) $x \geq 0$일 때 $|x| = x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$
$\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$이므로 $x = -4$는 부적합
$\therefore x = 1$
(ii) $x < 0$일 때 $|x| = -x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$
$x = 4$ 또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -1$
$\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$이므로 $x = 4$는 부적합
(i), (ii)에서 $x = \pm 1$

5. $0 < x < 2$일 때, 방정식 $2x^2 - x - 3[x] = 0$의 모든 해의 합은?(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2x^2 - x - 3[x] = 0$에서 $0 < x < 2$이므로

(i) $0 < x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로

$2x^2 - x = 0, x(2x-1) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = \frac{1}{2}$

그런데 $0 < x < 1$이므로 $x = \frac{1}{2}$

(ii) $1 \le x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로

$2x^2 - x - 3 = 0,\ (x+1)(2x-3) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $\frac{3}{2}$

그런데 $1 \le x < 2$이므로 $x = \frac{3}{2}$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

6. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b,$
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

7. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots ㉠$
$y = x + 1 \qquad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면
$x^2 + ax + a = x + 1$
$\therefore \ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$
㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$
$\therefore \ (a-1)\{(a-1) - 4\} = 0$
$\therefore \ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5
따라서 구하는 a의 값은 6

8. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x의 값으로 옳지 않은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① 0 ② $\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ 1 ⑤ -1

해설

$$i(x+i)^3 = i(x^3+3x^2i-3x-i)$$
$$= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

9. x에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값을 구하면?

① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$, $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\frac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\frac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a \neq -\frac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3 \quad \therefore\ a=1$

10. n이 짝수일 때, $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$ 의 값은?

① -2 ② $-\sqrt{2}$ ③ 0 ④ 2 ⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$$

$$=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\left\{\left(\frac{1-\pi}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=(\pi^2)^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\{(-\pi)^2\}^{2n}-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

11. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a \neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a, b의 합은?

① 12 ② -12 ③ 15 ④ -15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore \ \omega^2=-\omega-2$

$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$

$\qquad = (b-a)\omega+(12-2a)$

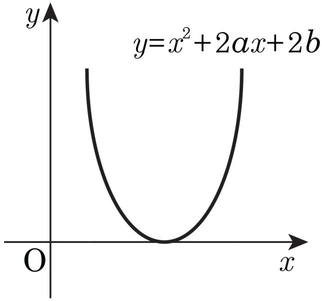
$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3, \ 12-2a=0$ ($\because$ ω는 허수)

$\therefore \ a=6, \ b=9$

12. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\dfrac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b-1)^2 - 1 < 0$

∴ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

13. $x^2 - xy - 6y^2 + x + 7y + k$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 상수 k의 값을 정하면?

① -2 ② -4 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

x에 관해 식을 정리하면

$f(x) = x^2 + (1-y)x + (-6y^2 + 7y + k)$

$f(x)$가 두개의 일차식으로 인수분해 되려면

$D = (1-y)^2 - 4(-6y^2 + 7y + k)$가 완전제곱식이어야 한다.

$D = 25y^2 - 30y + (1-4k)$에서

$\frac{D}{4} = (-15)^2 - 25(1-4k) = 0$

$\therefore\ k = -2$

14. 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=3$, $f(\beta)=3$, $f(1)=-2$를 만족한다. 이차방정식 $f(x)=0$를 구하면?

① $x^2-2x-4=0$
② $x^2-4x-1=0$
③ $x^2-x-4=0$
④ $x^2-x+4=0$
⑤ $x^2-2x-1=0$

해설

$x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이고

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$ax^2+bx+c=3$에서 $ax^2+bx+c-3=0$

$\therefore -\dfrac{b}{a}=\alpha+\beta=2$

또, $\dfrac{c-3}{a}=\alpha\beta=-4$

$f(1)=a+b+c=-2$이므로

$a=-b-c-2$, $b=-2a$에서

$b=-2(-b-c-2)=2b+2c+4$

$\therefore b+2c+4=0$

$c-3=-4a$에서

$c=-4(-b-c-2)+3=4b+4c+11$

연립하여 풀면 $c=-1$, $b=-2$, $a=1$

$\therefore f(x)=x^2-2x-1$

15. 방정식 $x^2 + 2(m-1)x - m + 3 = 0$의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m의 범위를 정하면?

① $-2 < m < 3$　　② $2 \le m < 3$　　③ $-1 < m < 3$

④ $1 < m \le 3$　　⑤ $3 < m \le 4$

해설

두 근을 α, β라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

(ⅰ) $\dfrac{D}{4} = (m-1)^2 + m - 3 \ge 0$

$m^2 - m - 2 \ge 0$, $(m-2)(m+1) \ge 0$

$\therefore\ m \le -1$, $m \ge 2$

(ⅱ) $\alpha + \beta = -2(m-1) < 0 \quad \therefore\ m > 1$

(ⅲ) $\alpha\beta = -m + 3 > 0 \quad \therefore\ m < 3$

$\therefore$ (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 공통범위는 $2 \le m < 3$

16. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 -2, 4 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

① -10 ② -12 ③ -14 ④ -16 ⑤ -18

해설

$ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 -2, 4 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ &= a(x+2)(x-4) \\ &= a(x^2-2x-8) \\ &= a(x-1)^2-9a \end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a=9$

$\therefore a=-1$

따라서 구하는 이차함수는 $y=-x^2+2x+8$ 이고

$b=2$, $c=8$ 이다.

$\therefore abc=-1\times2\times8=-16$

17. x 의 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 3 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^2 - ax + a^2 - 3 = 0 \cdots$ ㉠

㉠는 두 실근을 가지므로,

$D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geq 0$, 즉 $a^2 - 4 \leq 0$ $\therefore$ $-2 \leq a \leq 2$

그런데 α, β 는 ㉡의 두 근이므로,

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = a^2 - 3$

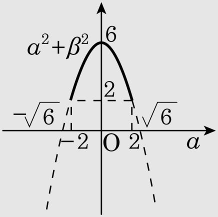
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 2(a^2 - 3) = 6 - a^2$

여기서, $-2 \leq a \leq 2$ 이므로

$0 \leq a^2 \leq 4$

$\therefore$ $2 \leq 6 - a^2 \leq 6$

$\therefore$ $2 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 6$



따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 은

$a = 0$ 일 때 최대이고, 최댓값 : 6

$a = \pm 2$ 일 때 최소이고, 최소값 : 2

18. $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^5+x^4+x^3+x^2+1$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 0 ② $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ③ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

④ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면, $x^2-x+1=0$

$x^5+x^4+x^3+x^2+1$ 를 x^2-x+1 로 직접 나누면

몫이 x^3+2x^2+2x+1 이고 나머지는 $-x$ 이다.

즉, $x^5+x^4+x^3+x^2+1$

$=(x^2-x+1)(x^3+2x^2+2x+1)-x$

$\therefore\ x^5+x^4+x^3+x^2+1$

$=-x\ (\because x^2-x+1=0)$

$=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x^2-x+1=0$ 을 만든 다음 양변에 $x+1$ 를 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1$

$$x^5+x^4+x^3+x^2+1=-x^2-x-1+x^2+1$$
$$=-x=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

19. x에 대한 이차방정식 $(x-p)(x-q)+a(x-q)+b(x-p)=0$의 두 근을 α, β라 한다. $ab \neq 0, p \neq q$일 때, $\dfrac{a(q-\alpha)(q-\beta)}{b(p-\alpha)(p-\beta)}$의 값을 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$(x-p)(x-q)+a(x-q)+b(x-p)=(x-\alpha)(x-\beta)$

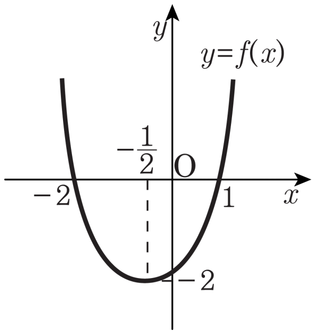
양변에 x 대신에 p, q를 각각 대입하면

$a(p-q)=(p-\alpha)(p-\beta)$

$b(q-p)=(q-\alpha)(q-\beta)$이므로

$$\frac{a(q-\alpha)(q-\beta)}{b(p-\alpha)(p-\beta)}=\frac{a\cdot b(q-p)}{b\cdot a(p-q)}=-1$$

20. 다음 그림은 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 세 실근의 합은?



① $-\frac{5}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ 0　⑤ 1

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근이 -2 와 1 이므로

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = -2$ 또는 $f(x) = 1$

i) $f(x) = -2$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$

ii) $f(x) = 1$ 에서 $x = -\frac{1}{2} + \alpha$, $x = -\frac{1}{2} - \alpha$

따라서 모든 근의 합은

$$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \alpha\right) + \left(-\frac{1}{2} - \alpha\right) = -\frac{3}{2}$$

21. x에 대한 방정식 $|x^2-4|=2x+m$이 서로 다른 4개의 실근을 가질 때, 실수 m의 값 또는 m의 값의 범위는?

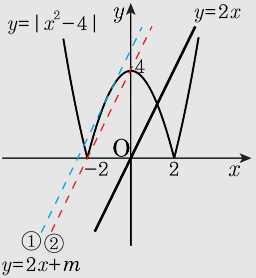
① $-4<m<4$　　② $m=-4$

③ $m=4$ 또는 $m=5$　　④ $4<m<5$

⑤ $m>5$

해설

$y=|x^2-4|$와 $y=2x+m$을 그래프로 나타내면



서로 다른 4개의 실근을 가지는 경우는 ①, ②번 그래프와 같다.

① $-x^2+4=y$와 $2x+m=y$이 접하는 경우

$-x^2+4=2x+m$

$x^2+2x+m-4=0$

$\frac{D}{4}=1-m+4=0$

$\therefore\ m=5$

② $y=2x+m$이 $(-2,\ 0)$을 지나는 경우

$0=-4+m$

$\therefore\ m=4$

구하는 식은 ①, ②번 그래프 사이이므로

$\therefore\ 4<m<5$

22. n 이 자연수일 때, 이차함수 $y = 2n^2 - 11n + 20$ 의 최솟값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} y &= 2n^2 - 11n + 20 \\ &= 2\left(n^2 - \frac{11}{2}n + \frac{121}{16}\right) - \frac{121}{8} + 20 \\ &= 2\left(n - \frac{11}{4}\right)^2 + \frac{39}{8} \end{aligned}$$

n 이 자연수이므로

$\frac{11}{4}$ 에 가장 가까운 자연수는 3 이다.

따라서 $n = 3$ 일 때,

최솟값 $2 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 + 20 = 5$ 를 갖는다.

23. 함수 $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{ax^2 - 3x + a - 2}}$ 이 최댓값을 가질 때, 정수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

분모가 항상 양수이므로 주어진 함수가 최대가 될 때는 함수 $y = ax^2 - 3x + a - 2 \cdots$ ㉠이 최솟값을 가질 때이다.
만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함숫값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.
따라서 $a > 0 \cdots$ ㉡
$D = -4a^2 + 8a + 9 < 0 \cdots$ ㉢ 의 두 식이 모두 만족되면, ㉠이 양의 최솟값을 갖는다.

$-4a^2 + 8a + 9 < 0$ 에서 $a < \dfrac{2 - \sqrt{13}}{2}$, $a > \dfrac{2 + \sqrt{13}}{2}$

따라서 ㉡과의 공통 범위를 구하면 $a > \dfrac{2 + \sqrt{13}}{2} = 2.80$ 이므로

$a = 3$ 이다.

24. $f(x)=|2x-3|-2,\ g(x)=x^2-3$ 일 때, $0\le x\le 2$ 에서 $(g\circ f)(x)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=t$ 로 놓으면,

$-2\le t\le 1$

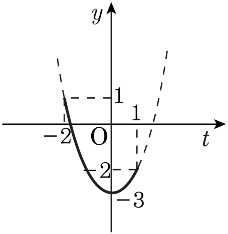
$(g\circ f)(x)=g(t)=t^2-3$

따라서 최댓값은 1 ,

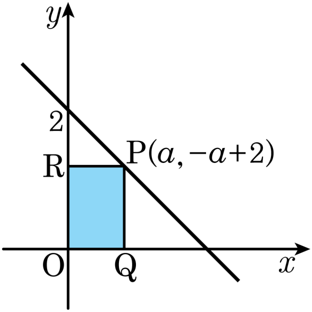
최솟값은 -3

$\therefore\ M=1, m=-3$

$\therefore\ M+m=-2$



25. 다음 그림과 같이 직선 $y=-x+2$ 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발은 각각 Q, R 이고, 점 P 의 좌표는 $(a, -a+2)$, 직사각형 OQPR 의 넓이를 y 라 할 때, y 의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제1 사분면이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 P 의 좌표는 $(a, -a+2)$ 이고 넓이는 y 이므로

$$\begin{aligned} y &= a(-a+2) = -a^2+2a \\ &= -(a^2-2a+1)+1 \\ &= -(a-1)^2+1 \end{aligned}$$

따라서 y의 최댓값은 1이다.