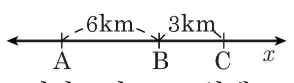
1. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6 km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3 km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?

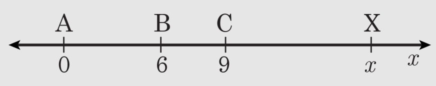


① 6 km ② 9 km ③ 12 km

④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)
A마을과 X마을 사이의 거리는
C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로
$|x-0|=2|x-9|$
곧, $|x|=2|x-9|$
$\therefore\ 2(x-9)=\pm x$
$\therefore\ x=6$ 또는 $x=18$
여기서 $x=6$이면 X = B가 되므로 성립하지 않는다.
따라서 $x=18$
이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18-6=12$(km)

2. 두 점 $A(a,\ 2b+a)$, $B(-a,\ a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{(-a-a)^2 + \{a-(2b+a)\}^2}$$
$$= \sqrt{4a^2+4b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5}$$
$$\therefore\ a^2+b^2 = 5$$

3. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$

$2a^2 - 8a + 8 = 0$, $a^2 - 4a + 4 = 0$, $(a-2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 2$

4. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ 0)$　② $(1,\ 0)$　③ $(2,\ 0)$
④ $(-1,\ 0)$　⑤ $(5,\ 0)$

해설

x축 위의 점을 $P(x, 0)$라 하면
$\overline{PA} = \overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$이므로
$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$
$14x = 28$
따라서 $x = 2$ 즉, $P(2,\ 0)$

5. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

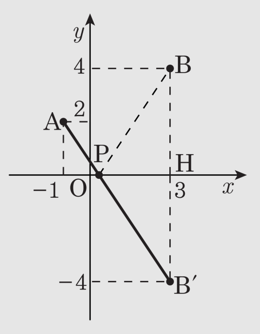
$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}^2=(-1-a)^2+(-5-3)^2=a^2+2a+65$
$\overline{\mathrm{CA}}^2=(a-3)^2+(3-7)^2=a^2-6a+25$
$\overline{\mathrm{BC}}^2=(3+1)^2+(7+5)^2=160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2-4a+90=160$
$\therefore\ a^2-2a-35=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

6. 두 점 A$(-1,\ 2)$, B$(3,\ 4)$에 대하여 점 P가 x축 위를 움직일 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{41}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 B′$(3,\ -4)$
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$
따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최소거리는 $\overline{AP}+\overline{B'P}$의 최소 거리와 같고
세 점 A, P, B′이 직선 위에 있을 때
가장 짧은 $\overline{AB'}$이 최소거리이다.
$\therefore\ \overline{AB'}=\sqrt{(3+1)^2+(-4-2)^2}=2\sqrt{13}$



7. 네 점 O(0, 0), A(3, 1), B(4, 3), C(a, b)를 꼭짓점으로 하는 □OABC가 평행사변형일 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선 OB, AC의 중점이 일치하므로

$\left(2,\ \frac{3}{2}\right)=\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$

$\frac{a+3}{2}=2$에서 $a=1$

$\frac{b+1}{2}=\frac{3}{2}$에서 $b=2$

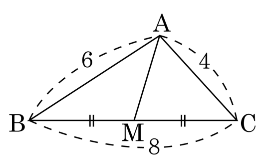
$\therefore\ a+b=3$

8. $\triangle$ABC의 꼭짓점 A(4, 6), B(−2, 2)이고, 무게중심이 G(1, 3)일 때 꼭짓점 C의 좌표는?

① (−1, 1)　② (1, −1)　③ (1, 1)
④ (−1, −1)　⑤ (1, 2)

해설
무게중심 구하는 공식을 이용한다.
점 C$(x,\ y)$라 하면,
$$G=\left(\frac{4-2+x}{3},\ \frac{6+2+y}{3}\right)=(1,\ 3)$$
$\therefore\ x=1,\ \ y=1$

9. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M 일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$

$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$
$\therefore \overline{AM}^2 = 10$

10. 두 점 $A(1,1)$, $B(4,3)$에 대하여 점 P가 x축 위의 점 일때, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은?

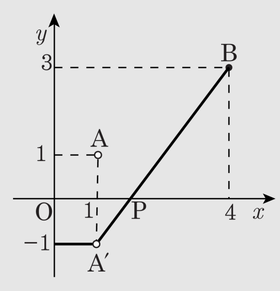
① 5　　② $2\sqrt{2}$　　③ $4\sqrt{2}$　　④ $8\sqrt{2}$　　⑤ 8

해설

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 A $(1,1)$을 x축에 대해 대칭이동시킨 $A'(1,\ -1)$과 B $(4,3)$을 잇는 선분의 길이와 같다.

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{A'B}$이므로

$\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2+(3+1)^2} = \sqrt{25} = 5$



11. 세 점 $A(2,1), B(1,3), C(2,0)$ 에 대하여 $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P 가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$ ② $x + 2y + 3 = 0$ ③ $x - 3y - 2 = 0$
④ $x - 4y + 5 = 0$ ⑤ $x - 5y + 4 = 0$

해설

점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BP}^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2 &= (x-2)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + y^2 + 4\end{aligned}$$

$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$ 에서

$2\left(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\right) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 = 3\left(x^2 - 4x + y^2 + 4\right)$

$3x^2 - 10x + 3y^2 - 10y + 20 = 3x^2 - 12x + 3y^2 + 12$

$2x - 10y + 8 = 0$

$\therefore x - 5y + 4 = 0$

12. 세 점 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P 의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$　② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$　③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$　⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$ 라 두면
$x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+(x-1)^2+(y-2)^2$
$=3x^2-4x+3y^2-4y+6$
$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$
$\therefore P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소
※ 점 P 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이 된다.
$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

13. 두 점 A$(-2,\ 1)$, B$(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고 직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$　② $(-2,\ -5)$　③ $(3,\ 5)$
④ $(2,\ 3)$　⑤ $(2,\ 5)$

해설

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$에서
$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-4)^2+(b+3)^2$
정리하면 $12a-8b=20$
$\therefore\ 3a-2b=5\cdots$ ①
또, P는 $y=2x-1$ 위에 있으므로
$b=2a-1\cdots$ ②
①, ② 를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-7$

14. 세 점 $A(5,\ 0)$, $B(0,\ 3)$, $C(0,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 외심의 좌표는?

① $O\left(\frac{5}{8},\ 0\right)$ ② $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$ ③ $O\left(0,\ \frac{5}{8}\right)$
④ $O\left(0,\ \frac{8}{5}\right)$ ⑤ $O(0,\ 0)$

해설

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리
$\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{CO}$ 에서
$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = \sqrt{x^2+(y+3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \cdots$ ①
$\overline{AO} = \overline{BO}$에서
$\sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x-6y=16$
즉 $5x-3y=8 \cdots$ ②
①과 ②에서 $x = \frac{8}{5}$, $y = 0$
따라서 외심의 좌표는 $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$이다.

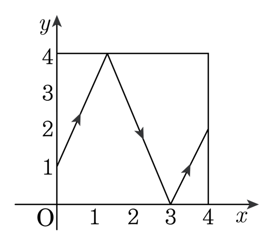
15. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$의 최솟값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

해설

원점을 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이라 하면
$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$
$=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$이므로
이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O, A, B가 일직선 위에 있을 때이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$의 최소값은
$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

16. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$ 와 $(4,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,\ 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$ 에 도달하는 꺽인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)



① $(1,\ 4)$ ② $\left(\frac{10}{7},\ 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$
④ $\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$ 과 $(4,10)$ 을 연결하는 직선과 $y=4$ 와의 교점을 계산하면 된다. $\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases}$ $\therefore\ \ x = \frac{4}{3}$

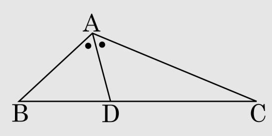
따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

17. 세 점 A$(-2,\ 0)$, B$(-1,\ \sqrt{3})$, C$(1,\ -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle$ABD 와 $\triangle$ACD 의 넓이의 비는?

① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 1 : 4 ④ 2 : 3 ⑤ 2 : 5

해설

점 D 가 $\angle$A 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로
$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2 : 5$
$\therefore\ \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 5$



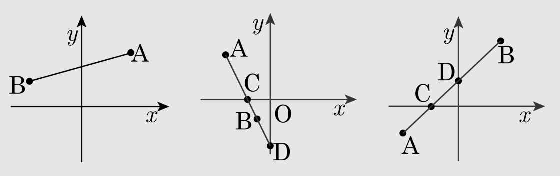
18. 좌표평면 위에 두 점 A, B 와 x 축 위의 점 C, y 축 위의 점 D 가 있다. 점 C 는 선분 AB 의 내분점이고, 점 D 는 선분 AB 의 외분점일 때, 다음 중 옳은 설명을 모두 고른 것은?

㉠ 점 A 가 제 1사분면의 점이면 점 B 는 제 2사분면의 점이다. ㉡ 점 A 가 제 2사분면의 점이면 점 B 는 제 3사분면의 점이다. ㉢ 점 A 가 제 3사분면의 점이면 점 B 는 제 1사분면의 점이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

ⅰ) 문제에서 점 C 는 선분 AB 의 내분점이므 로, 점 C 는 선분 AB 와 x 축의 교점이다.
ⅱ) 점 D 는 선분 AB 의 외분점이므로, 점 D 는 선분 AB 의 연장선과 y 축의 교점이다.
㉠, ㉡, ㉢의 세 가지 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



x 축 위의 점 C 가 선분 AB 의 내분점이므로 두점 A, B 는 x 축에 대하여 서로 반대편에 놓이게 된다.
그러므로 ㉠은 옳지 않다.
y 축 위의 점 D 는 선분 AB 의 외분점이므로 점 D 는 직선 AB 위의 점이지만 선분 AB 위의 점은 아니다.
그러므로 ㉡은 옳지만 ㉢은 옳지 않다.

19. 정점 A$(1,\ 4)$와 직선 $x+2y-1=0$ 위의 동점 P를 연결하는 선분 AP를 $2:1$로 내분하는 점의 자취의 방정식을 구하면?

① $x+2y-5=0$

② $2x+3y-10=0$

③ $3x+6y-11=0$

④ $3x-6y-10=0$

⑤ $2x+5y-9=0$

해설

P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $a+2b-1=0 \cdots\cdots$ ①

$\overline{\mathrm{AP}}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

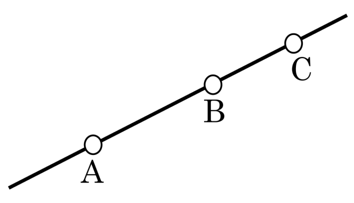
$x=\dfrac{2a+1}{3},\ y=\dfrac{2b+4}{3}$

$\therefore\ a=\dfrac{3x-1}{2},\ b=\dfrac{3y-4}{2} \cdots\cdots$ ②

②을 ①에 대입하면 $\dfrac{3x-1}{2}+2\times\dfrac{3y-4}{2}-1=0$

$\therefore\ 3x+6y-11=0$

20. 아래 그림과 같이 일직선 위의 세 점 A, B, C 에 소매상이 있고, 어느 한 지점에 도매상을 세우려고 한다. 운반 비용은 도매상에서 각 소매상에 이르는 거리의 제곱의 합에 비례한다고 할 때, 운반 비용을 최소로 하는 도매상의 위치는?(단, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{BC}}$)



① $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점

② $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점

③ $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 중점

④ $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점

⑤ $\overline{\mathrm{AC}}$ 를 3 : 2 으로 내분하는 점

해설

소매상의 위치를 각각

A$(-2a,\ 0)$, B$(0,\ 0)$, C$(a,\ 0)$ (단, $a > 0$)이라 하고

도매상의 위치를 P$(x,\ y)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$

$= (x+2a)^2 + y^2 + x^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$

$= 3x^2 + 2ax + 3y^2 + 5a^2$

$= 3\left(x + \frac{1}{3}a\right)^2 + 3y^2 + \frac{14}{3}a^2$

따라서 $x = -\frac{1}{3}a,\ y = 0$ 일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 이 최소이고

운반 비용도 최소이다.

이 때, 점 P $\left(-\frac{1}{3}a,\ 0\right)$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점이다.