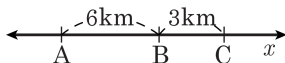


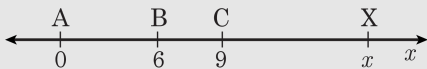
1. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?



- ① 6 km ② 9 km ③ 12 km
 ④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A 마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)

A 마을과 X 마을 사이의 거리는

C 마을과 X 마을 사이의 거리의 2 배이므로

$$|x - 0| = 2|x - 9|$$

$$\text{곧, } |x| = 2|x - 9|$$

$$\therefore 2(x - 9) = \pm x$$

$$\therefore x = 6 \text{ 또는 } x = 18$$

여기서 $x = 6$ 이면 $X = B$ 가 되므로 성립하지 않는다.

따라서 $x = 18$

이 때, X 마을과 B 마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12(\text{km})$

2. 두 점 $A(a, 2b + a)$, $B(-a, a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(-a - a)^2 + \{a - (2b + a)\}^2} \\ &= \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5} \\ \therefore a^2 + b^2 &= 5\end{aligned}$$

3. 좌표평면 위의 두 점 $P(a, 3)$, $Q(1, a)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2 - 8a + 10 = 2$$

$$2a^2 - 8a + 8 = 0, a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

4. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표는?

① $(-3, 0)$

② $(1, 0)$

③ $(2, 0)$

④ $(-1, 0)$

⑤ $(5, 0)$

해설

x 축 위의 점을 $P(x, 0)$ 라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x + 3)^2 + (0 - 2)^2 = (x - 4)^2 + (0 - 5)^2$$

$$14x = 28$$

따라서 $x = 2$ 즉, $P(2, 0)$

5. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$ 가 $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 가 직각이므로

피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \dots \textcircled{7}$$

이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 에 대하여

$$\overline{AB}^2 = (-1 - a)^2 + (-5 - 3)^2 = a^2 + 2a + 65$$

$$\overline{CA}^2 = (a - 3)^2 + (3 - 7)^2 = a^2 - 6a + 25$$

$$\overline{BC}^2 = (3 + 1)^2 + (7 + 5)^2 = 160 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{7} \text{에 의해 } 2a^2 - 4a + 90 = 160$$

$$\therefore a^2 - 2a - 35 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은 2이다.

6. 두 점 A (-1, 2), B (3, 4)에 대하여 점 P가 x 축 위를 움직일 때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

- ① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{41}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{5}$

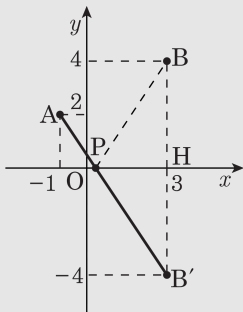
해설

점 B를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 B' (3, -4)

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최소거리는 $\overline{AP} + \overline{B'P}$ 의 최소 거리와 같고
세 점 A, P, B'이 직선 위에 있을 때
가장 짧은 $\overline{AB'}$ 이 최소거리이다.

$$\therefore \overline{AB'} = \sqrt{(3+1)^2 + (-4-2)^2} = 2\sqrt{13}$$



7. 네 점 $O(0, 0)$, $A(3, 1)$, $B(4, 3)$, $C(a, b)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\square OABC$ 가 평행사변형일 때, $a + b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

평행사변형 $OABC$ 에서 두 대각선 OB , AC 의 중점이 일치하므로

$$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

$$\frac{a+3}{2} = 2 \text{에서 } a = 1$$

$$\frac{b+1}{2} = \frac{3}{2} \text{에서 } b = 2$$

$$\therefore a + b = 3$$

8. $\triangle ABC$ 의 꼭짓점 $A(4, 6)$, $B(-2, 2)$ 이고, 무게중심이 $G(1, 3)$ 일 때 꼭짓점 C 의 좌표는?

① $(-1, 1)$

② $(1, -1)$

③ $(1, 1)$

④ $(-1, -1)$

⑤ $(1, 2)$

해설

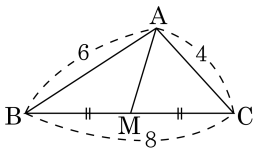
무게중심 구하는 공식을 이용한다.

점 $C(x, y)$ 라 하면,

$$G = \left(\frac{4 - 2 + x}{3}, \frac{6 + 2 + y}{3} \right) = (1, 3)$$

$$\therefore x = 1, y = 1$$

9. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \text{ 이므로}$$

$$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$$

$$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$$

$$\therefore \overline{AM}^2 = 10$$

10. 두 점 $A(1,1)$, $B(4,3)$ 에 대하여 점 P 가 x 축 위의 점 일때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

① 5

② $2\sqrt{2}$

③ $4\sqrt{2}$

④ $8\sqrt{2}$

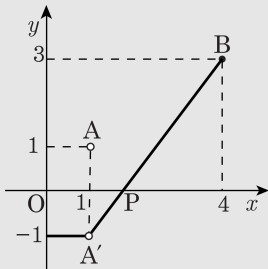
⑤ 8

해설

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $A(1,1)$ 을 x 축에 대해 대칭이동시킨 $A'(1, -1)$ 과 $B(4,3)$ 을 잇는 선분의 길이와 같다.

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B}$ 이므로

$$\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$



11. 세 점 A(2,1), B(1,3), C(2,0)에 대하여 $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$

② $x + 2y + 3 = 0$

③ $x - 3y - 2 = 0$

④ $x - 4y + 5 = 0$

⑤ $x - 5y + 4 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BP}^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2 &= (x-2)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + y^2 + 4\end{aligned}$$

$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$ 에서

$$\begin{aligned}2(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 &= \\ 3(x^2 - 4x + y^2 + 4)\end{aligned}$$

$$3x^2 - 10x + 3y^2 - 10y + 20 = 3x^2 - 12x + 3y^2 + 12$$

$$2x - 10y + 8 = 0$$

$$\therefore x - 5y + 4 = 0$$

12. 세 점 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$ 에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P 의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

② $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$

③ $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

④ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

⑤ $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x, y)$ 라 두면

$$x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$= 3x^2 - 4x + 3y^2 - 4y + 6$$

$$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}$$

$\therefore P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소

※ 점 P 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이 된다.

$$\left(\frac{0+1+1}{3}, \frac{0+0+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

13. 두 점 A(-2, 1), B(4, -3)에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점 P의 좌표는?

- ① (-3, -7) ② (-2, -5) ③ (3, 5)
④ (2, 3) ⑤ (2, 5)

해설

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서

$$(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = (a - 4)^2 + (b + 3)^2$$

정리하면 $12a - 8b = 20$

$$\therefore 3a - 2b = 5 \cdots \textcircled{1}$$

또, P는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로

$$b = 2a - 1 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -7$

14. 세 점 $A(5, 0)$, $B(0, 3)$, $C(0, -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표는?

① $O\left(\frac{5}{8}, 0\right)$

② $O\left(\frac{8}{5}, 0\right)$

③ $O\left(0, \frac{5}{8}\right)$

④ $O\left(0, \frac{8}{5}\right)$

⑤ $O(0, 0)$

해설

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로

$$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}, \overline{BO} = \overline{CO} \text{ 에서}$$

$$\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \dots$ ①

$$\overline{AO} = \overline{BO} \text{ 에서}$$

$$\sqrt{(x - 5)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $10x - 6y = 16$

$$\text{즉 } 5x - 3y = 8 \dots \text{ ②}$$

①과 ②에서 $x = \frac{8}{5}, y = 0$

따라서 외심의 좌표는 $O\left(\frac{8}{5}, 0\right)$ 이다.

15. 좌표평면 위에 두 점 $A(a, b)$, $B(-2, 2)$ 가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2}$ 의 최솟값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

⑤ 3

해설

원점을 $O(0, 0)$ 이라 하면

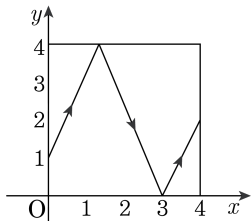
$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2} \\ = \overline{OA} + \overline{AB} \text{이므로}$$

이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O , A , B 가 일직선 위에 있을 때이다.

따라서 $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최소값은

$$\overline{OB} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

16. $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 4)$ 와 $(4, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0, 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4, 2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)



- ① $(1, 4)$ ② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$
 ④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0, 1)$ 과 $(4, 10)$ 을 연결하는 직선과 $y = 4$

와의 교점을 계산하면 된다. $\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \therefore x = \frac{4}{3}$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

17. 세 점 $A(-2, 0)$, $B(-1, \sqrt{3})$, $C(1, -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?

① 1 : 2

② 1 : 3

③ 1 : 4

④ 2 : 3

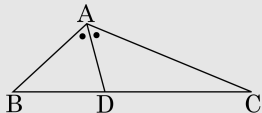
⑤ 2 : 5

해설

점 D 가 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의
교점이므로

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2 : 5$$

$$\therefore \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 5$$



18. 좌표평면 위에 두 점 A, B와 x 축 위의 점 C, y 축 위의 점 D가 있다. 점 C는 선분 AB의 내분점이고, 점 D는 선분 AB의 외분점일 때, 다음 중 옳은 설명을 모두 고른 것은?

- ㉠ 점 A가 제 1사분면의 점이면 점 B는 제 2사분면의 점이다.
 ㉡ 점 A가 제 2사분면의 점이면 점 B는 제 3사분면의 점이다.
 ㉢ 점 A가 제 3사분면의 점이면 점 B는 제 1사분면의 점이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

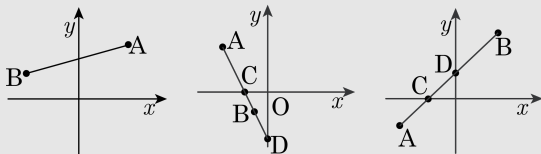
⑤ ㉡, ㉢

해설

i) 문제에서 점 C는 선분 AB의 내분점이므로, 점 C는 선분 AB와 x 축의 교점이다.

ii) 점 D는 선분 AB의 외분점이므로, 점 D는 선분 AB의 연장선과 y 축의 교점이다.

㉠, ㉡, ㉢의 세 가지 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



x 축 위의 점 C가 선분 AB의 내분점이므로 두 점 A, B는 x 축에 대하여 서로 반대편에 놓이게 된다.

그러므로 ㉠은 옳지 않다.

y 축 위의 점 D는 선분 AB의 외분점이므로 점 D는 직선 AB 위의 점이지만 선분 AB 위의 점은 아니다.

그러므로 ㉡은 옳지만 ㉢은 옳지 않다.

19. 정점 A(1, 4)와 직선 $x + 2y - 1 = 0$ 위의 동점 P를 연결하는 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점의 자취의 방정식을 구하면?

① $x + 2y - 5 = 0$

② $2x + 3y - 10 = 0$

③ $3x + 6y - 11 = 0$

④ $3x - 6y - 10 = 0$

⑤ $2x + 5y - 9 = 0$

해설

P의 좌표를 (a, b) 라 하면 $a + 2b - 1 = 0 \dots\dots ①$

$\overline{AP}$ 를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

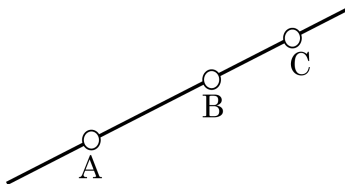
$$x = \frac{2a + 1}{3}, y = \frac{2b + 4}{3}$$

$$\therefore a = \frac{3x - 1}{2}, b = \frac{3y - 4}{2} \dots\dots ②$$

$$②\text{을 } ①\text{에 대입하면 } \frac{3x - 1}{2} + 2 \times \frac{3y - 4}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore 3x + 6y - 11 = 0$$

20. 아래 그림과 같이 일직선 위의 세 점 A, B, C 에 소매상이 있고, 어느 한 지점에 도매상을 세우려고 한다. 운반 비용은 도매상에서 각 소매상에 이르는 거리의 제곱의 합에 비례한다고 할 때, 운반 비용을 최소로 하는 도매상의 위치는?(단, $\overline{AB} = 2\overline{BC}$)



- ① $\overline{AB}$ 의 중점
- ② $\overline{BC}$ 의 중점
- ③ $\overline{AC}$ 의 중점
- ④ $\overline{AB}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점
- ⑤ $\overline{AC}$ 를 3 : 2 으로 내분하는 점

해설

소매상의 위치를 각각

$A(-2a, 0)$, $B(0, 0)$, $C(a, 0)$ (단, $a > 0$)이라 하고

도매상의 위치를 $P(x, y)$ 라 하면

$$\begin{aligned} & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= (x + 2a)^2 + y^2 + x^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 \\ &= 3x^2 + 2ax + 3y^2 + 5a^2 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{3}a\right)^2 + 3y^2 + \frac{14}{3}a^2 \end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{1}{3}a$, $y = 0$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 이 최소이고
운반 비용도 최소이다.

이 때, 점 $P\left(-\frac{1}{3}a, 0\right)$ 은 $\overline{AB}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점이다.