1. $x^4 - 6x^2 + 8$를 인수분해하면? (단, 유리수 범위에서 인수분해 하여라.)

① $(x^2 - 2)(x^2 - 4)$

② $(x^2 - 2)(x - 4)(x + 4)$

③ $(x^2 - 2)(x - 2)(x + 2)$

④ $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2)(x + 2)$

⑤ $(x^2 - \sqrt{2})(x - 2)(x + 2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^2 + 8 &= (x^2)^2 - 6x^2 + 8 \\ &= (x^2 - 2)(x^2 - 4) \\ &= (x + 2)(x - 2)(x^2 - 2) \end{aligned}$$

해설

인수정리를 이용할 수 있다.

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

$f(2) = 0, \quad f(-2) = 0,$

즉, $(x - 2)(x + 2)$로 나누어 떨어지므로

조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

2. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{-8} = 2\sqrt{2}i$

② 3의 허수부분은 0이다.

③ $\sqrt{-2}$ 는 순허수이다.

④ $b = 1$ 이면 $a + (b - 1)i$ 는 실수이다.

⑤ 제곱하여 -3 이 되는 수는 $\pm\sqrt{3}i$ 이다.

해설

④ [반례] $a = i,\ b = 1$ 이면 $a + (b - 1)i = i$ 이므로 순허수이다.(거짓)

3. 등식 $\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}=1-\frac{i}{5}$ 를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $16xy$ 의 값은?

① 97 ② 98 ③ 99 ④ 100 ⑤ 101

해설

$$(\text{좌변})=\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}$$
$$=\frac{x(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$\frac{(x+y)+2(y-x)i}{5}$ 이므로

$$\frac{x+y}{5}+\frac{2(y-x)i}{5}=1-\frac{i}{5}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{x+y}{5}=1\ ,\ \frac{2(y-x)}{5}=-\frac{1}{5}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=\frac{11}{4},\ y=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ 16xy=16\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{9}{4}=99$$

4. $(1+3i)(1-3i)-(2-i)(3+i)$ 를 계산하면?

① $17-i$　② $3+i$　③ $3-i$　④ $7+i$　⑤ $7-i$

해설

$(1+3i)(1-3i)-(2-i)(3+i)$

$=\ (1+9)-(6-i+1)$

$=\ 3+i$

5. $x = 1 + \sqrt{2}i, y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1　　② 1　　③ -2　　④ 2　　⑤ -3

해설

$x^2 = (1 + \sqrt{2}i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i - 2 = -1 + 2\sqrt{2}i$
$y^2 = (1 - \sqrt{2}i)^2 = 1 - 2\sqrt{2}i - 2 = -1 - 2\sqrt{2}i$
$\therefore\ x^2 + y^2 = -2$

해설

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times 3 = -2$

6. $\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 의 켤레복소수를 각각 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라 할 때, $\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$ 의 값은?

① 0　② 3　③ $7-2i$　④ $7-i$　⑤ $7+i$

해설

$\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 에서 $\overline{\alpha} = 1 - i$, $\overline{\beta} = 2 + i$ 이므로

$$\begin{aligned}&\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}\\&= (1+i)(1-i) + (1+i)(2+i) + (1-i)(2-i) + (1-i)(2+i)\\&= (1+1) + (2-1+3i) + (2-1-3i) + (2+1-i)\\&= 7-i\end{aligned}$$

7. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a \geq 0,\ b < 0$ ② $a > 0,\ b > 0$ ③ $a \geq 0,\ b > 0$

④ $a < 0,\ b < 0$ ⑤ $a \leq 0,\ b < 0$

해설

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 가 성립할 조건은 $b < 0$ 이고 $a \geq 0$ 일 때이다.

8. 다음 중 다항식 $a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$ 의 인수인 것은?

① $a + c$ ② $a - b^2$ ③ $a^2 - b^2 + c^2$

④ $a^2 + b^2 + c^2$ ⑤ $a^2 + b^2 - c^2$

해설

$$
\begin{aligned}
& a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2 \\
&= a^3 - b^3 + (a-b)c^2 - ab(a-b) \\
&= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b)c^2 - ab(a-b) \\
&= (a-b)(a^2 + ab + b^2 + c^2 - ab) \\
&= (a-b)(a^2 + b^2 + c^2)
\end{aligned}
$$

9. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

10. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,
$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$
$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

11. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$

$$=a+1=2000$$

12. 다음 세 다항식에서 최대공약수를 구하면?

$$2x^2-3x+1,\quad 3x^2-x-2,\quad x^2+3x-4$$

① $x-1$ ② $2x-1$ ③ $x-2$

④ $x+3$ ⑤ $x+1$

해설

$2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)$

$3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$

$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$

따라서 최대 공약수는 $x-1$이다.

13. 세 개의 다항식 x^3+ax+b, x^3+cx^2+a, cx^2+bx+4, 의 공약수 중 하나가 $x-1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② -2 ③ 3 ④ -3 ⑤ 4

해설

$f(x)=x^3+ax+b \to f(1)=1+a+b=0 \cdots$ ㉠
$g(x)=x^3+cx^2+a \to g(1)=1+c+a=0 \cdots$ ㉡
$h(x)=cx^2+bx+4 \to h(1)=c+b+4=0 \cdots$ ㉢
㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(a+b+c)+6=0$
$\therefore a+b+c=-3$

14. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$ $3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4 개,

$2, -\sqrt{2}$ 는 실수이므로

$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$ 가 된다.

15. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$
$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$
순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로
$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$
(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$
(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$
$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $x=-1$

16. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야
하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2 \neq 0$ 이어야 하므로 $x \neq 2$
따라서 $x=-3$

17. 실수 x, y에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x+y=3,\ x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times-\frac{7}{1}=-11$

18. 등식 $3x-2yi=(2+i)^2$ 이 성립하는 x, y에 대하여 두 수를 곱하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$3x-2yi=(2+i)^2=3+4i$

$x=1,\quad y=-2$

$\therefore\ xy=-2$

19. 등식 $\left(\dfrac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\dfrac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b=9$

해설

$$(\text{좌변})=\frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$$
$$=\frac{6-7i}{3}=2-\frac{7}{3}i$$ 이므로

$$2-\frac{7}{3}i=a+bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=2,\ b=-\frac{7}{3}$$

$$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\frac{7}{3}\right)=2+7=9$$

20. 다음 중 인수분해가 잘못된 것을 고르면?

① $(x-y)^2 - xy(y-x) = (x-y)(x-y+xy)$

② $3a^2 - 27b^2 = 3(a+3b)(a-3b)$

③ $64a^3 - 125 = (4a+5)(16a^2 - 20a + 25)$

④ $(x^2 - x)\,(x^2 - x + 1) - 6 = (x^2 - x + 3)(x+1)(x-2)$

⑤ $2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$

해설

$64a^3 - 125$

$= (4a)^3 - (5)^3$

$= (4a-5)\left(16a^2 + 20a + 25\right)$

21. $(x^2-8x+12)(x^2-7x+12)-6x^2$을 인수분해하면?

① $(x^2-x+2)(x^2-5x+2)$

② $(x^2-5x+12)(x^2-10x+12)$

③ $(x^2-3x+4)(x^2-x+2)$

④ $(x^2+3x+12)(x^2-5x+12)$

⑤ $(x^2+x+12)(x^2-2x+12)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x^2+12)-8x\}\{(x^2+12)-7x\}-6x^2\\ &= (x^2+12)^2-15x(x^2+12)+50x^2\\ &= (x^2+12-5x)(x^2+12-10x)\\ &= (x^2-5x+12)(x^2-10x+12)\end{aligned}$$

22. 다항식 $2x^2-xy-y^2-4x+y+2$를 인수분해 한 식은?

① $(2x-y-2)(x+y-1)$

② $(2x+y+2)(x-y+1)$

③ $(2x-y-2)(x-y-1)$

④ $(2x+y-2)(x+y-1)$

⑤ $(2x+y-2)(x-y-1)$

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준 식}) &= 2x^2-(y+4)x-(y^2-y-2)\\
&= 2x^2-(y+4)x-(y+1)(y-2)\\
&= \{2x+(y-2)\}\{x-(y+1)\}\\
&= (2x+y-2)(x-y-1)
\end{aligned}
$$

23. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$을 만족하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① $\angle B = 120°$인 둔각삼각형 ② 직각삼각형

③ $\angle B = 150°$인 둔각삼각형 ④ 이등변삼각형

⑤ $\angle A = 35°$인 예각삼각형

해설

$$a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$$
$$=a^2(b-c)+a(c+b)(c-b)+bc(b-c)$$
$$=(b-c)\left\{a^2+(c+b)a+bc\right\}$$
$$=(b-c)(a+b)(a+c)$$
$$\therefore b=c\ (\because a+b\neq 0,\ a+c\neq 0)$$

24. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4+1)(x^2-1)}{(x^4+1)(x+1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

25. 두 다항식 $A = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$, $B = x^2 - (k+2)x + 2k$ 의 최소공배수가 $(x+\alpha)^2(x+\beta)^2$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① 2 ② -2 ③ 3 ④ -3 ⑤ -5

해설

$A = (x+3)^2(x-2)$, $B = (x-2)(x-k)$

따라서 A, B 의 최소공배수 L 은

$(x+3)^2(x-2)(x-k)$

이것이 $(x+\alpha)^2(x+\beta)^2$ 의 꼴이 되려면

$x - 2 = x - k$

$\therefore\ k = 2$

26. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A=x^2+ax-9=Gp$

$B=x^2+bx+c=Gq$라 하면

$A+B=(p+q)G=2x^2-4x-6=2(x+1)(x-3)$

$L=pqG=x^3-x^2-9x+9=x^2(x-1)-9(x-1)$

$=(x-1)(x^2-9)=(x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G=x-3$, $p=x+3$, $q=x-1$이다.

$\therefore\ A=(x+3)(x-3)=x^2-9$

$B=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

$\therefore\ a=0,\ b=-4,\ c=3$

$\therefore\ a-b+c=7$

27. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ 일 때, $f\left(\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$$
$$=f(i^2)+f((-i)^2)$$
$$=f(-1)+f(-1)$$
$$=0$$

28. x^4-11x^2+1 이 $(x^2+ax+b)(x^2+3x+b)$ 로 인수분해될 때, $a+b$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} x^4-11x^2+1 &= (x^2-1)^2-9x^2 \\ &= (x^2-1)^2-(3x)^2 \\ &= (x^2-3x-1)(x^2+3x-1) \\ &= (x^2+ax+b)(x^2+3x+b) \end{aligned}$$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=-4$

29. 실수 a, b, c에 대하여 $[a,\ b,\ c] = a^2 + bc$라 하고 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$일 때, $[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y]$의 값은?

① 10 ② 22 ③ 88 ④ 100 ⑤ 144

해설

$[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y]$
$= x^2 + 2yz + y^2 + 2zx + z^2 + 2xy$
$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
$= (x + y + z)^2 = 100$

30. x^2+ax+b, x^2+bx+a 의 최대공약수가 x 의 일차식일 때, 최소공배수는?

① $(x-2)(x-a)(x-b)$ ② $(x+2)(x-a)(x-b)$

③ $(x+1)(x+a)(x+b)$ ④ $(x+1)(x-a)(x-b)$

⑤ $(x-1)(x-a)(x-b)$

해설

$$\begin{cases} x^2+ax+b & \cdots ㉠ \\ x^2+bx+a & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ − ㉡ : $(a-b)(x-1)$

㉠, ㉡ 에서 $a \neq b$ 이므로 최대공약수는 $x-1$ 이다.

$1+a+b=0$, $a=-1-b$, $b=-1-a$

이 때, ㉠은 $x^2-(1+b)x+b=(x-1)(x-b)$

㉡은 $x^2-(1+a)x+a=(x-1)(x-a)$

여기서, $a \neq b$ 이므로 $x-a$ 와 $x-b$ 는 서로 소이다.

따라서, 구하는 최소공배수는 $(x-1)(x-a)(x-b)$

31. 다음은 다항식 A 를 다항식 B 로 나누었을 때, 몫이 Q 이고 나머지가 R 이면, A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수임을 보이는 과정을 나타낸 것이다.

> $A = BQ + R$ 이 성립한다. A, B 의 공약수를 g 라 하면
> $A = ag$, $B = bg$ $(a,\ b,\ g$ 는 다항식$)\cdots$㉠로 쓸 수 있다.
> 이 때, $R = A - BQ = (a - bQ)g$ 에서 g 는 R 의 약수이다.
> $\therefore g$ 는 B, R 의 공약수이다. $\cdots$㉡
> 역으로, B, R 의 공약수를 g' 이라 하면
> $B = b'g', R = r'g'$ $(b',\ r',\ g'$ 은 다항식$)\cdots$㉠′ 으로 쓸 수 있다.
> 이 때, $A = BQ + R = (b'Q + r')g'$ 에서 g' 은 A 의 약수이다.
> $\therefore g'$ 은 A, B 의 공약수이다. $\cdots$ ㉡′
> 이상에서 $\{g \mid g$ 는 A, B 의 공약수$\} = \{g' \mid g'$ 은 B, R 의 공약수$\}\cdots$ ㉢
> $\therefore$ A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수이다. $\cdots$ ㉣

위 과정에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① ㉠, ㉠′
② ㉡, ㉡′
③ ㉢
④ ㉣
⑤ 없다.

해설

유클리드의 호제법의 원리를 설명한 것으로 옳지 않은 과정은 없다.

32. $i(x+i)^3$이 실수일 때, 실수 x의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0 ② $\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ 1 ⑤ -1

해설

$$i(x+i)^3 = i(x^3+3x^2i-3x-i)$$
$$= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

33. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $\dfrac{1}{2w^3+3w^2+4w}=aw+b$ 를 만족하는 실수 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ 2 ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{3}$

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w (허근) 라 하고, $w^2+w+1=0$ 에서 양변에 $w-1$ 을 곱하면,

$w^3-1=0 \quad \therefore\ w^3=1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2w^3+3w^2+4w} &= \frac{1}{3w^2+4w+2} \\ &= \frac{1}{3(w^2+w+1)+w-1} \\ &= \frac{1}{w-1} \\ &= \frac{w+2}{(w-1)(w+2)} \\ &= \frac{w+2}{w^2+w-2} \\ &= \frac{w+2}{-3} \\ &= -\frac{1}{3}w-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3}w-\dfrac{2}{3}=aw+b$ 에서

a, b 가 실수, w 는 허수이므로

$a=-\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{2}{3} \qquad \therefore\ a+b=-1$