

1. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

㉠ -1 ㉡ 0 ㉢ 1 ㉣ 2 ㉤ 3

해설

$z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$$z = 2(k-i) - k(1+i)^2$$

$$= 2k - 2i - 2ki$$

$$= 2k - (2 + 2k)i$$

허수 부분이 0 이려면 $2 + 2k = 0$ 이어야 한다.

따라서 $k = -1$

2. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

㉠ 5

㉡ 7

㉢ $2\sqrt{3} + 4i$

㉣ 12

㉤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$$x + y = 2\sqrt{3},$$

$$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7 \text{ 이므로}$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5 \text{ 이다.}$$

3. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

- I. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3) \cdot (-3)} = \sqrt{9} = 3$
II. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5 \times (-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
III. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\frac{2}{-6}} = \sqrt{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}i$
IV. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

- ① I, II ② I, III ③ II, III, IV
④ II, IV ⑤ III, IV

해설

- I. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
 $\therefore$ 옳지 않다.
II. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
 $\therefore$ 옳다.
III. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\frac{2}{6}} \cdot \frac{i}{i^2} = -\sqrt{\frac{1}{3}}i$
 $\therefore$ 옳지 않다.
IV. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
 $\therefore$ 옳다.

4. 방정식 $|x - 1| = 2$ 의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

i) $x \geq 1$ 일 때

$|x - 1| = x - 1$ 이므로, $x - 1 = 2$

$\therefore x = 3$

ii) $x < 1$ 일 때

$|x - 1| = -x + 1$ 이므로, $-x + 1 = 2$

$\therefore x = -1$

따라서 (i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = -1$

5. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

- ① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
 $x^2 + (m - 3)x + 1 = 0, D = (m - 3)^2 - 4 > 0$
 $m^2 - 6m + 5 > 0, (m - 1)(m - 5) > 0$
 $\therefore m < 1, m > 5$

6. 이차함수 $y = -(x-1)(x+3)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} y &= -(x-1)(x+3) \\ &= -x^2 - 2x + 3 \\ &= -(x+1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$x = -1$ 일 때, 최댓값 4 를 가진다.

7. 함수 $y = -x^2 - 2x + 5$ ($-2 \leq x \leq 2$)의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y = -x^2 - 2x + 5 = -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 5 = -(x + 1)^2 + 6$$

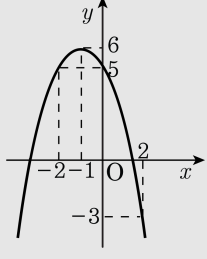
점 $(-1, 6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.

$$f(-2) = 5, f(2) = -3$$

따라서 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $f(-1) = 6$ 이며

최솟값은 $x = 2$ 일 때 $f(2) = -3$ 이다.

$$\therefore M + m = 6 - 3 = 3$$



8. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0, x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0,$$
$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

제 1 식에서 $(x - 1)(x + 1)(x + 3) = 0$

∴ $x = 1, -1, -3$

제 2 식에서 $(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 0$

∴ $x = 1, -1, -2$

제 3 식에서 $(x - 1)^2(x - 2) = 0$

∴ $1, 2$

∴ 공통근 : $x = 1$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ xy - y^2 = 6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x = p, y = q$ 또는 $x = r, y = s$ 이다. $p + q + r + s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & \cdots \textcircled{A} \\ xy - y^2 = 6 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①에서 $x = 2y + 1 \cdots \cdots \textcircled{C}$

②을 ②에 대입하여 정리하면

$$y^2 + y - 6 = 0(y - 2)(y + 3) = 0$$

$$\therefore y = 2, -3$$

$y = 2, y = -3$ 을 ③에 대입하면

$$\text{각각 } x = 5, x = -5$$

$$\therefore x = 5, y = 2 \text{ 또는 } x = -5, y = -3$$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x + y$

값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 에서

$(x - y)(x - 2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$ 일 때

$$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$$

$$x = \pm 2, y = \pm 2$$

ii) $x = 2y$ 일 때

$$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$$

$$y = \pm \sqrt{2}, x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$$

11. $x = \frac{1-i}{1+i}$ 일 때, $x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2006} + x^{2007}$ 의 값을 계산하면?

① $-1-i$

② -1

③ $-i$

④ 1

⑤ i

해설

$$x = \frac{1-i}{1+i} = -i \quad x^2 = -1 \quad x^3 = i \quad x^4 = 1$$

$\therefore x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$ 이므로, 4개의 항마다 합이 0이 된다.

$$\Rightarrow x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2006} + x^{2007}$$

$$= 0 + 0 + \dots + x^{2005} + x^{2006} + x^{2007}$$

$$= (x^4)^{501} \cdot x + (x^4)^{501} \cdot x^2 + (x^4)^{501} \cdot x^3$$

$$= -i - 1 + i$$

$$= -1$$

12. 다음은 두 복소수 z_1, z_2 에 대하여 ' $z_1 \cdot z_2 = 0$ 이면 $z_1 = 0$ 또는 $z_2 = 0$ '임을 보인 것이다.

$$\begin{aligned} z_1 &= a + bi, z_2 = c + di \quad (a, b, c, d \text{는 실수}) \text{라고 하자.} \\ z_1 z_2 &= 0 \text{이면 } (a + bi)(c + di) = 0 \\ \text{이 식의 양변에 } (a - bi)(c - di) \text{를 곱하면} \\ (\text{좌변}) &= (a + bi)(c + di)(a - bi)(c - di) \\ &= (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di) \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ (\text{우변}) &= 0 \cdot (a - bi)(c - di) = 0 \\ \therefore (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= 0 \\ \text{따라서 } a^2 + b^2 = 0 \text{ 또는 } c^2 + d^2 = 0 \text{ 이므로} \\ a = b = 0 \text{ 또는 } c = d = 0 \\ \therefore z_1 = 0 \text{ 또는 } z_2 = 0 \end{aligned}$$

다음 중 위의 과정에 이용되지 않는 성질은?

- ①

두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = y = 0$ 이다.
- ②

두 실수 x, y 에 대하여 $xy = 0$ 이면 $x = 0$ 또는 $y = 0$ 이다.
- ③

두 실수 x, y 에 대하여 $x + yi = 0$ 이면 $x = y = 0$ 이다.
- ④

임의의 복소수 α 에 대하여 $0 \cdot \alpha = 0$ 이다.
- ⑤

복소수 α, β 에 대하여 $\alpha\beta = \beta\alpha$ 이다.

해설

$$\begin{aligned} z_1 &= a + bi, z_2 = c + di \quad (a, b, c, d \text{는 실수}) \text{라고 하자.} \\ z_1 z_2 &= 0 \text{이면 } (a + bi)(c + di) = 0 \\ (\text{좌변}) &= (a + bi)(c + di)(a - bi)(c - di) \cdots \text{ ⑤} \\ &= (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di) \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ (\text{우변}) &= 0 \cdot (a - bi)(c - di) = 0 \cdots \text{ ④} \\ \therefore (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= 0 \cdots \text{ ②} \\ \text{따라서 } a^2 + b^2 = 0 \text{ 또는 } c^2 + d^2 = 0 \text{ 이므로 } \cdots \text{ ①} \\ a = b = 0 \text{ 또는 } c = d = 0 \cdots \text{ ③의 역} \\ \therefore a + bi = 0 \text{ 또는 } c + di = 0 \\ \text{즉, 이 과정에서 ③의 역은 이용되었지만, ③은 이용되지 않았다.} \end{aligned}$$

13. 방정식 $(k^2 - 3)x + 1 = -k(2x - 1)$ 에 대하여 해가 무수히 많이 존재하기 위한 k 의 값을 k_1 , 해가 존재하지 않기 위한 k 의 값을 k_2 라 할 때, $k_1 + k_2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 3 ③ -3 ④ 1 ⑤ -2

해설

$$(k^2 + 2k - 3)x = k - 1, \quad (k - 1)(k + 3)x = k - 1$$

$$k = 1 \text{ 일 때, } 0 \cdot x = 0 \text{ (부정)}$$

$$\therefore k_1 = 1$$

$$k = -3 \text{ 일 때, } 0 \cdot x = -4 \text{ (불능)}$$

$$\therefore k_2 = -3$$

$$\therefore k_1 + k_2 = -2$$

14. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 4x + ka - 2k + b = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 중근을 가지도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

중근을 가지려면 판별식은 0이다.

$$D' = 2^2 - (ka - 2k + b) = 0$$

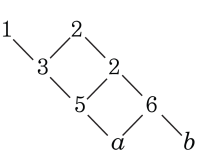
$$\Rightarrow (2 - a)k + 4 - b = 0$$

모든 k 에 대하여 성립하려면

$$a = 2, b = 4$$

$$\therefore a + b = 6$$

15. 다음 그림은 수의 규칙을 나타낸 것이다. a , b 와 대응하는 수를 두 근으로 하는 이차방정식을 구하면?



- ① $x^2 - 5x + 6 = 0$
- ② $x^2 - 11x + 30 = 0$
- ③ $x^2 - 41x + 330 = 0$
- ④ $x^2 - 7x + 8 = 0$
- ⑤ $x^2 - 15x + 12 = 0$

해설

왼쪽 $1-3-5-a$ 는 잇줄 두 수의 합
오른쪽 $2-2-6-b$ 는 잇줄 두 수의 곱
 $\therefore a = 5 + 6 = 11, b = 5 \times 6 = 30$
11, 30을 두 근으로 하는 이차방정식은
 $\therefore x^2 - 41x + 330 = 0$

16. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 - i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?

① -20 ② -12 ③ 5 ④ 12 ⑤ 20

해설

한 근이 $2 - i$ 이면 다른 한 근은 $2 + i$

두 근의 합 : $4 = -a$

두 근의 곱 : $5 = b$

$\therefore ab = -20$

17. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + (k+3) = 0$ 의 두 근이 모두 음수일 때, 정수 k 의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(i) 두 근이 실수이므로 $\frac{D}{4} \geq 0$

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 1 \cdot (k+3) \geq 0$$

$$k^2 - 7k + 6 \geq 0, (k-1)(k-6) \geq 0$$

$$\therefore k \leq 1, k \geq 6$$

(ii) 두 근의 합은 음수, 곱은 양수

$$2(k-3) < 0, k+3 > 0$$

$$\therefore -3 < k < 3$$

(i), (ii)에 따라 $-3 < k \leq 1$

$\therefore$ 정수 k 의 최댓값은 1

18. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 가 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x = 2$ 에서 최솟값이 4 이므로
꼭짓점의 좌표가 (2, 4) 이다.
 $y = (x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 8$
 $a = 4, b = 8$
 $\therefore a + b = 12$

19. 둘레의 길이가 28cm 인 직사각형에서 넓이를 최대가 되게 하려면 가로와 세로의 길이를 각각 얼마로 하면 되겠는가?

① 가로 6 cm, 세로 8 cm

② 가로 7 cm, 세로 7 cm

③ 가로 8 cm, 세로 9 cm

④ 가로 8 cm, 세로 8 cm

⑤ 가로 7 cm, 세로 9 cm

해설

가로의 길이를 x cm , 세로의 길이를 $(14 - x)$ cm , 넓이를 y cm² 라 하면

$$\begin{aligned}y &= x(14 - x) \\&= -x^2 + 14x \\&= -(x^2 - 14x + 49 - 49) \\&= -(x - 7)^2 + 49\end{aligned}$$

따라서 $x = 7$, 즉 가로 7 cm, 세로 7 cm 일 때 최댓값 49 cm² 를 가진다

20. 지상 40m 높이에서 $v\text{m/s}$ 의 속도로 똑바로 위로 쏘아올린 공이 t 초 후에 지면으로부터 $h\text{m}$ 만큼의 높이가 될 때, $h = vt + 40 - 5t^2$ 의 식이 성립한다. 공이 3 초 후에 최고 높이에 도달했을 때, 이 최고 높이를 구하여라.

▶ 답 : m

▷ 정답 : 85 m

해설

$$h = -5t^2 + vt + 40 = -5\left(t - \frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v^2}{20} + 40$$

이 물체는 $t = \frac{v}{10}$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v^2}{20} + 40$ 에 도달하고, $\frac{v}{10} = 3$

이므로 $v = 30$ 이다.
따라서 최고 높이는 85m 이다.

21. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{3}i$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0$ 의 근 $1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, \alpha$

세 근의 곱 : $\alpha(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) = -4$

$\alpha(1 + 3) = -4, \alpha = -1$

세 근 : $1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -1$

세 근의 합 : $1 + \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i - 1 = -a$

$a = -1$

$b = (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) + (-1)(1 - \sqrt{3}i)$

$+ (-1)(1 + \sqrt{3}i)$

$= 1 + 3 - 1 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i = 2$

$\therefore a + b = -1 + 2 = 1$

22. 어떤 정육면체의 밑변의 가로와 세로의 길이를 1 cm 줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면
조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,
 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,
 $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서
 $3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$ 을 풀면 $x = 2$ (cm)

23. $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$ 에서 $x^2 + (y - 1)^2 = 0$

x, y 는 실수이므로 $x^2 \geq 0, (y - 1)^2 \geq 0$

따라서, $x = 0, y - 1 = 0$ 이므로 $x = 0, y = 1$

$\therefore x + y = 0 + 1 = 1$

24. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1+i+z)^2 < 0 \qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

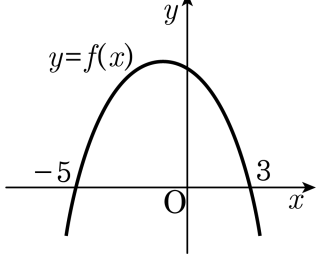
▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1+i+z)^2 < 0$ 에서 $1+i+z$ 는 순허수이다.
 $z = a + bi$ 라면
 $1+i+z = 1+i+a+bi = (1+a) + (1+b)i$
이것이 순허수이므로 $1+a = 0, a = -1$
 $\therefore z = -1 + bi$
또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1+bi)^2 = c + 4i$
 $1 - 2bi - b^2 = c + 4i$
 $\therefore -2b = 4, 1 - b^2 = c$
 $\therefore b = -2, c = -3$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 14$

25. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?

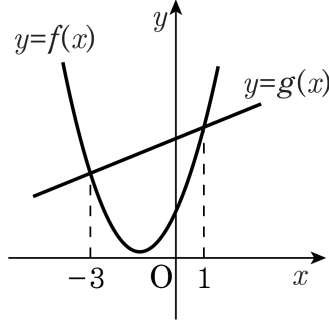


- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ ($a < 0$) 으로 놓으면
 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$
 $= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$ 이므로
 $\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서
 $x = -6$ 또는 $x = 10$
 따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

26. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



- ① -8 ② -6 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$$2x^2 + ax + 4 = cx + d \\ \Rightarrow 2x^2 + (a - c)x + 4 - d = 0 \cdots \textcircled{1}$$

근이 $-3, 1$ 이므로

$2(x + 3)(x - 1) = 0$ 과 일치한다.

$\textcircled{1}$ 과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\therefore f(x) - g(x) = 2x^2 + (a - c)x + 4 - d \\ = 2x^2 + 4x - 6 \\ = 2(x + 1)^2 - 8$$

$\therefore$ 최솟값 : -8

27. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

- ① $-\frac{7}{8}$ ② -1 ③ $\frac{1}{8}$ ④ 1 ⑤ $-\frac{9}{8}$

해설

$$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$$

$$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8} \text{ 이므로 } m \text{ 의 최댓값은 } -\frac{7}{8} \text{ 이다.}$$

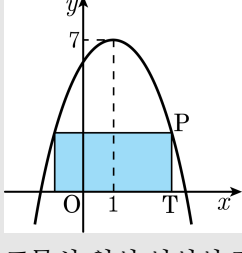
28. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t, -t^2 + 2t + 5)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2(t - 1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{(둘레의 길이)} &= 2\{2(t - 1) - t^2 + 2t + 5\} \\ &= 2(-t^2 + 4t + 3) \\ &= -2t^2 + 8t + 6 \\ &= -2(t - 2)^2 + 14 \end{aligned}$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

29. x 에 관한 삼차방정식 $kx^3 + (1-2k)x^2 + (k-2)x - 2k = 0$ 의 근이 모두 실수가 되기 위한 실수 k 의 범위를 구하면?

- ① $0 < k \leq \frac{1}{2}$ ② $0 < k \leq 1$ ③ $-\frac{1}{2} < k \leq 0$
④ $-\frac{1}{2} < k \leq \frac{1}{2}$ ⑤ $0 < k \leq \frac{1}{2}$

해설

준식 = $(x-2)(kx^2 + x + k) = 0$ 에서
 $kx^2 + x + k = 0$ 이 실근이어야하므로
 $D = 1 - 4k^2 \geq 0$,
 $k \neq 0$ 이므로 $0 < |k| \leq \frac{1}{2}$

30. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\frac{a^2+1}{4} \end{cases}$

이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\frac{3}{4}$
④ $a \leq \frac{2}{3}$

② $a > -\frac{1}{2}$
⑤ $a < 2$

③ $-1 < a < 1$

해설

$$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\frac{a^2+1}{4} \end{cases}$$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2 -$

$$(a+2)t + \frac{a^2+1}{4} = 0$$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$$D = (a+2)^2 - 4 \times \frac{a^2+1}{4} \geq 0$$

$$4a+3 \geq 0$$

$$\therefore a \geq -\frac{3}{4}$$

31. 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 의 값을 계산하면?

- ① $\sqrt{5}i$ ② $-\sqrt{5}i$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{5}$ ⑤ $\pm \sqrt{5}i$

해설

$\alpha + \beta = -3 < 0$, $\alpha\beta = 1 > 0$, $D = 9 - 4 > 0$ 이므로 두 근은 모두 음수이다.

$$\begin{aligned}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 &= (\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2 + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \\&= \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} \quad (\because \alpha < 0, \beta < 0 \text{ 이므로}) \\&= -3 - 2 = -5\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \pm \sqrt{5}i$$

$$\begin{aligned}\text{한편, } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} &= \sqrt{(-\alpha) \cdot (-1)} + \sqrt{(-\beta) \cdot (-1)} \\&= \sqrt{-\alpha} \cdot i + \sqrt{-\beta} \cdot i \\&= (\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta}) \cdot i\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 는 (양수) $\times i$ 꼴이다.

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{5}i$$

32. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $w^{-2n} + w^{-n} + 1$ 의 값들의 합을 구하면?
(단, n : 양의 정수)

- ① 0
- ② 3
- ③ 4
- ④ 1
- ⑤ -1

해설

$w^3 = 1, w^2 + w + 1 = 0$ 이므로
(i) $n = 3k$ 일 때
(준식) $= (w^3)^{-2k} + (w^3)^{-k} + 1 = 3$
(ii) $n = 3k + 1$ 일 때
(준식) $= (w^3)^{-2k} \cdot w^{-2} + (w^3)^{-k} \cdot w^{-1} + 1$
 $= \frac{w}{w^3} + \frac{w^2}{w^3} + 1 = w^2 + w + 1 = 0$
(iii) $n = 3k + 2$ 일 때
(준식) $= (w^3)^{-2k} \cdot w^{-4} + (w^3)^{-k} \cdot w^{-2} + 1$
 $= \frac{w^2}{w^6} + \frac{w}{w^3} + 1 = w^2 + w + 1 = 0$
 $\therefore n = 3k$ 이면 3, $n \neq 3k$ 이면 0
 $\therefore$ 준식의 값들의 합은 3

33. 거리가 100 m인 두 지점 A, B가 있다. 갑은 A에서 출발하며 B로 달리고, 을은 B에서 출발하여 A로 자전거를 타고 달렸다. 두 사람은 동시에 출발하여 P지점에서 만났는데 만나고 나서 갑은 8초 후에 B에, 을은 2초 후에 A에 도착하였다. 갑, 을이 각각 일정한 속도로 달렸다고 할 때, A, P사이의 거리는?

- ① 20 m

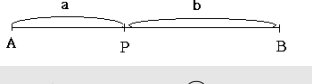
② 30 m

③ $\frac{100}{3}$ m
- ④ $\frac{121}{4}$ m

⑤ $\frac{147}{5}$ m

해설

갑의 속도를 α , 을의 속도를 β 라 하자.



$$a + b = 100 \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}, \quad \frac{b}{\alpha} = 8, \quad \frac{a}{\beta} = 2$$

$$\text{정리하면 } \frac{a}{\left(\frac{b}{8}\right)} = \frac{b}{\left(\frac{a}{2}\right)} \text{에서}$$

$$\frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{8}, \quad 4a^2 = b^2$$

$$\therefore b = 2a (\because a, b \text{는 양수})$$

$$\textcircled{1} \text{에 대입하면, } 3a = 100 \quad a = \frac{100}{3} \text{ m}$$