

1. $\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ 가 $x \neq 1$ 인 모두 실수 x 에 대해 항상 성립 하도록 a, b, c 를 구할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$$a+b=0, a-b+c=2, a-c=1$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1, c=0$

$$\therefore a+b+c=0$$

2. 다항식 x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$ 가 되도록 상수 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 직접나눈 나머지는

$$(a-b+16)x+4b-8$$

$$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots\textcircled{㉠}$$

㉠이 x 에 대한 항등식이므로,

$$a-b+16=3, 4b-8=4$$

$$\therefore a=-10, b=3$$

$$\therefore a+b=-7$$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$ 의 양변의 계수를

비교하여 $a=-10, b=3, p=-4$ 를 구해도 된다.

3. 다항식 $x^4 - 3x^2 + ax + 5$ 를 $x + 2$ 로 나누면 나머지가 3이다. a 의 값은?

① 0

② 2

③ 3

④ -2

⑤ -3

해설

$x^4 - 3x^2 + ax + 5 = f(x)$ 라 놓자.

$f(-2) = 3$ 에서 $-2a + 9 = 3$

$\therefore a = 3$

4. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 1$ 이 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 로 놓으면

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1, x-2$ 로 나누어 떨어진다.

$f(1) = 1 + a + b - 1 = 0$ 즉, $a + b = 0 \cdots \textcircled{\text{A}}$

$f(2) = 8 + 4a + 2b - 1 = 0$ 즉, $4a + 2b = -7 \cdots \textcircled{\text{B}}$

$\textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}}$ 으로부터 $a = -\frac{7}{2}, b = \frac{7}{2}$

$\therefore a + b = 0$

5. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해하였더니, $(x + ay)(x - by + c)$ 가 되었다.
이 때, a, b, c 를 순서대로 쓴 것은?

① $-1, 0, 1$

② $-1, 1, 2$

③ $-2, -1, 1$

④ $-1, -1, -2$

⑤ $-1, 2$

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - y^2 + 2y &= (x + y)(x - y) - 2(x - y) \\ &= (x - y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -1, b = -1, c = -2$$

6. 다음 중 다항식 $x^4 - 5x^2 + 4$ 를 인수분해 할 때, 나타나는 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$ ② $x - 2$ ③ $x - 3$ ④ $x + 1$ ⑤ $x + 2$

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)\end{aligned}$$

7. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2) \\ \therefore a &= -1, b = 2 \\ \therefore ab &= -1 \times 2 = -2\end{aligned}$$

8. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해 하였더니 $(x + ay)(x - by + c)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - y^2 + 2y \\ &= (x^2 - y^2) - 2(x - y) \\ &= (x + y - 2)(x - y) \\ &= (x + ay)(x - by + c) \end{aligned}$$

계수를 비교하면

$$a = -1, b = -1, c = -2$$
$$\therefore a + b + c = -1 - 1 - 2 = -4$$

9. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9개 ② 12개 ③ 16개 ④ 24개 ⑤ 32개

해설

$$\begin{aligned} 38 = x \text{ 라 하면,} \\ 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \\ \therefore (3+1)(3+1) &= 16 \end{aligned}$$

10. 두 다항식 $x^3 - 3x^2 + 2x$, $x^4 - 4x^3 + 4x^2$ 의 최대공약수와 최소공배수를 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 할 때, $f(3) + g(3)$ 의 값을 구하면?

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

해설

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-2)(x-1)$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x-2)^2$$

$$\therefore f(x) = x(x-2), g(x) = x^2(x-1)(x-2)^2$$

$$\therefore f(3) + g(3) = 3 + 18 = 21$$

11. 두 다항식 A, B 에 대하여 연산 Δ, ∇ 를 $A\Delta B = 2A + B$, $A\nabla B = A - 3B$ 로 정의한다.
 $A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$ 일 때 $A\nabla(B\Delta A)$ 를 구하면?
- ① $2x^3 - 18x - 10$ ② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$
③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$ ④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$
⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$\begin{aligned} A\nabla(B\Delta A) &= A\nabla(2B + A) \\ &= A - 3(2B + A) = -2A - 6B \end{aligned}$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B 에 대입하여 정리한다.

12. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

13. 다항식 $2x^2 + 5ax - a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x + 3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x + a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2 + 2ax - 2a^2$

② $x^2 - a^2$

③ $2x^2 + 3ax + a^2$

④ $2x^2 - 3ax - a^2$

⑤ $2x^2 + ax - a^2$

해설

$$2x^2 + 5ax - a^2 = P(x)(x + 3a) + 2a^2 \text{ 이므로}$$

$$P(x)(x + 3a) = 2x^2 + 5ax - 3a^2$$

따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2 + 5ax - 3a^2$ 을 $x + 3a$ 로 나눈 몫이므로

$$P(x) = 2x - a$$

$$\begin{aligned} \therefore (x + a)P(x) &= (x + a)(2x - a) \\ &= 2x^2 + ax - a^2 \end{aligned}$$

14. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3

② a^6+b^6

③ a^6-b^6

④ a^9+b^9

⑤ a^9-b^9

해설

(준 식) $= (a^3+b^3)(a^3-b^3) = a^6-b^6$

15. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a , b 라 할 때, $a-b$ 의 값은?

① $4^3 - 5^3$

② $3^3 - 3^4$

③ 0

④ 1

⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$ 을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3 = A$ 라 놓으면

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$$

$$= (A+x^4)^3$$

$$= A^3 + 3A^2x^4 + 3Ax^8 + x^{12}$$

$$= A^3 + (3A^2 + 3Ax^4 + x^8)x^4$$

이 때 $(3A^2 + 3Ax^4 + x^8)x^4$ 은 x^3 항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3 의 계수는 같다.

$$\therefore a-b=0$$

16. $(10^5 + 2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15

② 18

③ 21

④ 26

⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$$\begin{aligned} & 10^{15} + 2^3 + 3 \times 2 \times 10^5(10^5 + 2) \\ &= 10^{15} + 2^3 + 6 \times 10^{10} + 12 \times 10^5 \\ &= 10^{15} + 10^{10} \times 6 + 10^5 \times 12 + 8 \\ &\therefore 1 + 6 + 1 + 2 + 8 = 18 \end{aligned}$$

17. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겹넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{29}$ ③ $\sqrt{33}$ ④ 6 ⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$$2(ab + bc + ca) = 52$$

$$4(a + b + c) = 36 \rightarrow a + b + c = 9$$

(직육면체 대각선의 길이)

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)}$$

$$= \sqrt{81 - 52} = \sqrt{29}$$

18. 모든 모서리의 합이 36, 겹넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 하자.

$$4(a + b + c) = 36, 2(ab + bc + ca) = 56$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 81 - 56 = 25$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{대각선의 길이}) &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

19. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$ 을 곱하면,

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x^3 + 1 = 0, x^3 = -1 \text{ 에서 } x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \dots\dots ①$$

$x^2 - x + 1 = 0$ 를 x 로 나누어 정리한다.

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$$

$$① \text{ 에 대입하면, } x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$$

20. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$\frac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 = k)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$ 에서

$$(2-4k)x + 3a - k = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로,

$$2-4k = 0, 3a - k = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } 3a = k \text{ 에서 } a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 12a = 2$$

21. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 -5 이고, $x - 2$ 로 나누면 나머지가 1 이라고 한다. 이 때, 상수 m, n 에 대하여 $m + n$ 은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1$ 이 라 하면,

$$f(x) = (x + 1)Q_1(x) - 5$$

$$f(x) = (x - 2)Q_2(x) + 1$$

$$\therefore f(-1) = -1 + m - n + 1 = -5$$

$$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 1$$

$$m = -3, \quad n = 2$$

따라서 $m + n = -1$ 이다.

22. 세 다항식 $f(x) = x^2 + x - 2$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $h(x) = x^2 + mx + 8$ 의 최대공약수가 x 의 일차식일 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 6$

해설

$f(x) = (x + 2)(x - 1)$
 $g(x) = (x + 2)(2x - 1)$ 이므로
 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수는 $x + 2$
이것이 $h(x)$ 의 약수이어야 하므로
 $h(-2) = 4 - 2m + 8 = 0$
 $\therefore m = 6$

23. x^2+ax-9 와 x^2+bx+c 의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9 이다. $a-b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$
 $B = x^2 + bx + c = Gq$ 라 하면
 $A + B = (p + q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x + 1)(x - 3)$
 $L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x - 1) - 9(x - 1)$
 $= (x - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 3)(x - 3)$
따라서, $G = x - 3, p = x + 3, q = x - 1$ 이다.
 $\therefore A = (x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$
 $B = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$
 $\therefore a = 0, b = -4, c = 3$
 $\therefore a - b + c = 7$

24. $x^3 - x^2 + 2 = a(x - p)^3 + b(x - p)^2 + c(x - p)$ 가 x 에 대한항등식이 되도록 실수 $a + b + c + p$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

양변에 $x = p$ 를 대입하면
 $p^3 - p^2 + 2 = 0$
 $(p + 1)(p^2 - 2p + 2) = 0 \therefore p = -1$
따라서 주어진 식은
 $x^3 - x^2 + 2 = a(x + 1)^3 + b(x + 1)^2 + c(x + 1)$
양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $2 = a + b + c$
 $\therefore a + b + c + p = 1$

해설

$a(x - p)^3 + b(x - p)^2 + c(x - p)$
 $= (x - p) \{a(x - p)^2 + b(x - p) + c\}$
 $\therefore (x + 1)(x^2 - 2x + 2)$
 $= (x - p) \{a(x - p)^2 + b(x - p) + c\}$
양변을 비교하면, $x + 1 = x - p$,
 $x^2 - 2x + 2 = a(x - p)^2 + b(x - p) + c$
 $\therefore p = -1$
또 $x^2 - 2x + 2 = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$
 $\qquad \qquad \qquad = ax^2 + (2a + b)x + a + b + c$
 $\therefore a = 1, 2a + b = -2, a + b + c = 2$
 $\therefore b = -4, c = 5$
따라서 $a = 1, b = -4, c = 5, p = -1$
 $\therefore a + b + c + p = 1$

25. $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 을 동시에 만족시키는 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 11

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

(i) $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 에서

x, y 를 z 에 대하여 나타내면

$$x = 2z + 1, y = -3z - 1$$

(ii) $x = 2z + 1$, $y = -3z - 1$ 을 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$(4a + 9b + c)z^2 + 2(2a + 3b)z + (a + b - 1) = 0$$

$$\therefore 4a + 9b + c = 0, 2a + 3b = 0, a + b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 3, b = -2, c = 6$$

$$\therefore a + b + c = 7$$

26. 등식 $(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}$ 의 값은?

① -2^{10} ② -2^9 ③ 0 ④ 2^9 ⑤ 2^{10}

해설

$$(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20} \cdots \textcircled{A}$$

①은 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 실수 값을 대입해도 항상 성립한다.

①의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{B}$$

①의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-2)^{10} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{C}$$

① + ③을 하면

$$2^{10} + (-2)^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$$

$$2 \times 2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20} = 2^{10}$$

27. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때의 나머지가 3이고, $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눌 때의 나머지가 $3x$ 일 때, $f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때의 나머지는?

① 3

② $3x + 3$

③ $3x - 3$

④ $6x - 9$

⑤ $9x + 6$

해설

$$f(x) = (x-2)(x-1)Q(x) + 3$$

$$f(x) = (x-3)(x-1)Q'(x) + 3x$$

$\therefore f(2) = 3, f(3) = 9f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때의 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$f(x) = (x-2)(x-3)Q''(x) + ax + b$$

$$f(2) = 2a + b = 3, f(3) = 3a + b = 9$$

$$a = 6, b = -9$$

$\therefore$ 나머지는 $6x - 9$

28. 다음 보기 중 $ab(b-a) + ac(c-a) + bc(2a-b-c)$ 의 인수인 것을 모두 고르면?

☐ $a-b$	☐ $b+c$	☐ $a-c$
--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------

- ☐ ① ☐
- ☐ ② ☐
- ☐ ③ ☐ ☐
- ☐ ④ ☐ ☐
- ☒ ⑤ ☐ ☐ ☐

해설

$$\begin{aligned} & ab(b-a) + ac(c-a) + bc(2a-b-c) \\ &= ab^2 - a^2b + ac^2 - a^2c + 2abc - b^2c - bc^2 \\ &= -(b+c)a^2 + (b^2 + 2bc + c^2)a - bc(b+c) \\ &= -(b+c)(a^2 - (b+c)a + bc) \\ &= -(b+c)(a-b)(a-c) \\ &= (a-b)(b+c)(c-a) \end{aligned}$$

29. $a + b + c = 1$ 을 만족하는 세 실수 a, b, c 에 대하여 $x = a - 2b + 3c$, $y = b - 2c + 3a$, $z = c - 2a + 3b$ 라 할 때, $(x^2 + 2xy + 1) + (y^2 + 2yz + 1) + (z^2 + 2zx + 1)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$a + b + c = 1$ 이므로

$$x + y + z = 2a + 2b + 2c = 2(a + b + c) = 2$$

$$\therefore (x^2 + 2xy + 1) + (y^2 + 2yz + 1) + (z^2 + 2zx + 1)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx + 3$$

$$= (x + y + z)^2 + 3$$

$$= 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

30. 다음은 유클리드 호제법 ‘두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같다.’를 보이는 과정이다.

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면,
 $A = Ga, B = Gb$ (단, a, b 는 서로소)로 나타낼 수 있다.
 A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
 $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
 $\therefore R = G(a - bQ)$
즉, G 는 B 와 R 의 (가) 이다.
한편, b 와 $a - bQ$ 가 (나) 가 아니라면
(가) m (일차이상의 다항식)이 존재하여
 $b = mk, a - bQ = mk'$ 이 성립한다.
 $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
즉, a 와 b 의 (가) m 이 존재하므로
 a 와 b 가 서로소라는 가정에 모순이다.
따라서 b 와 $a - bQ$ 는 (나) 이다.
 $B = Gb, R = G(a - bQ)$ 에서
 b 와 $a - bQ$ 가 (나) 이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수 G 와 같다.

()안의 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① 공약수, 공약수

② 공약수, 서로소
- ③ 공약수, 공배수

④ 공배수, 서로소
- ⑤ 공배수, 공약수

해설

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면
 $A = Ga, B = Gb$ (단, a, b 는 서로소)이고,
 A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
 $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
 $\therefore R = (a - bQ)G$
즉, G 는 B 와 R 의 공약수이다.
한편, b 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면
공약수인 m 이 존재하여
 $b = mk, a - bQ = mk'$
 $a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
즉, a 와 b 의 공약수 m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 것에 모순된다.
따라서 b 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.
 $B = Gb, R = G(a - bQ)$ 에서 a 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수와 같다.

31. 10차 다항식 $P(x)$ 가 $P(k) = \frac{k}{k+1}$ (단, $k = 0, 1, 2, \dots, 10$)을 만족

시킬 때, $P(11)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{6}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{5}{6}$
- ⑤ 1

해설

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k) - k = 0$$

$$f(x) = (x+1)P(x) - x \text{라 하면}$$

$$f(x) \text{는 } f(0) = f(1) = f(2) = \cdots$$

$$= f(10) = 0 \text{인 다항식이다.}$$

$$\therefore f(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$$

$$\text{또, } f(-1) = 1 = a(-1)(-2)\cdots(-11)$$

$$= -a \cdot 11! (\text{단, } 11! = 1 \times 2 \times \cdots \times 11)$$

$$\therefore a = -\frac{1}{11!}$$

$$f(11) = 12P(11) - 11$$

$$= -\frac{1}{11!} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdots 1 = -1$$

$$\therefore P(11) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

32. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-3)^2$ 으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+3$ 으로 나누면 4가 남는다고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $(x-3)^2(x+3)$ 으로 나눈 나머지는?

① $(x-3)^2$

② $3x^2+2x-5$

③ $\frac{1}{5}(x-3)^2$

④ x^2+2x-5

⑤ $\frac{1}{9}(x-3)^2$

해설

$$f(-3) = 4$$

$$f(x) = (x-3)^2(x+3)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = (x-3)^2(x+3)Q(x) + a(x-3)^2 (\because f(x) \text{는 } (x-3)^2 \text{으로 나누어 떨어진다.})$$

$$f(x) = (x-3)^2((x+3)Q(x) + a)$$

$$f(-3) = (-3-3)^2a = 4$$

$$\therefore a = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \text{구하는 나머지} : \frac{1}{9}(x-3)^2$$

33. 다음 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 이차식일 때, 상수 a, b 의 값의 곱 ab 를 구하면?

$$A = x^3 - ax - 2 \quad B = x^3 - 2x^2 + bx + 2$$

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{cases} A = x^3 - ax - 2 \\ B = x^3 - 2x^2 + bx + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = x(2x^2 - 2x - a + b) \\ A - B = 2x^2 - (a + b)x - 4 \end{cases}$$

A, B 의 최대공약수는 $A + B, A - B$ 의 최대공약수와 일치하고 x 는 A, B 의 공약수가 아니다.

$$\therefore 2x^2 - 2x - a + b = 2x^2 - (a + b)x - 4$$

$$\therefore a + b = 2, \quad -a + b = -4$$

$$\therefore a = 3, \quad b = -1$$

$$\text{따라서, } ab = -3$$