1. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$$
\begin{aligned}
z &= 2(k-i)-k(1+i)^2 \\
&= 2k-2i-2ki \\
&= 2k-(2+2k)i
\end{aligned}
$$

허수 부분이 0이려면 $2+2k=0$ 이어야 한다.

따라서 $k=-1$

2. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 5 ② 7 ③ $2\sqrt{3} + 4i$

④ 12 ⑤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$x + y = 2\sqrt{3}$,

$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7$ 이므로

$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5$ 이다.

3. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

④ Ⅱ, Ⅳ　⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$

∴ 옳지 않다.

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$

∴ 옳다.

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

∴ 옳지 않다.

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$

∴ 옳다.

4. 방정식 $|x-1|=2$의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

i) $x \geq 1$일 때
$|x-1|=x-1$이므로, $x-1=2$
$\therefore x=3$
ii) $x<1$일 때
$|x-1|=-x+1$이므로, $-x+1=2$
$\therefore x=-1$
따라서 (i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

5. 직선 $y=3x+2$ 와 포물선 $y=x^2+mx+3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m<-1, m>3$　② $m<1, m>5$　③ $-1<m<3$

④ $-1<m<5$　⑤ $1<m<5$

해설

$y=3x+2, y=x^2+mx+3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2+(m-3)x+1=0, D=(m-3)^2-4>0$

$m^2-6m+5>0, (m-1)(m-5)>0$

$\therefore\ m<1,\ m>5$

6. 이차함수 $y = -(x-1)(x+3)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$$
\begin{aligned}
y &= -(x-1)(x+3) \\
&= -x^2 - 2x + 3 \\
&= -(x+1)^2 + 4
\end{aligned}
$$

$x = -1$ 일 때, 최댓값 4 를 가진다.

7. 함수 $y=-x^2-2x+5\ (-2\le x\le 2)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 을 구하여라.

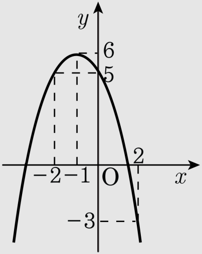
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y=-x^2-2x+5=-\left(x^2+2x+1-1\right)+5=-(x+1)^2+6$$

점$(-1,6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.



$f(-2)=5, f(2)=-3$

따라서 최댓값은 $x=-1$ 일 때 $f(-1)=6$ 이며

최솟값은 $x=2$ 일 때 $f(2)=-3$ 이다.

$\therefore\ M+m=6-3=3$

8. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3+3x^2-x-3=0,\ x^3+2x^2-x-2=0,$$
$$x^3-4x^2+5x-2=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

제 1식에서 $(x-1)(x+1)(x+3)=0$

$\therefore\quad x=1,\ -1,\ -3$

제 2식에서 $(x-1)(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\quad x=1,\ -1,\ -2$

제 3식에서 $(x-1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ 1,\ 2$

$\therefore$ 공통근 : $x=1$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2, \ y = \pm 2$

ii) $x = 2y$일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2}, \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

11. $x = \dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $x + x^2 + x^3 + ... + x^{2006} + x^{2007}$ 의 값을 계산하면?

① $-1-i$　　② -1　　③ $-i$

④ 1　　⑤ i

해설

$x = \dfrac{1-i}{1+i} = -i \quad x^2 = -1 \quad x^3 = i \quad x^4 = 1$

$\therefore x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$ 이므로, 4개의 항마다 합이 0이 된다.

$\Rightarrow x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2006} + x^{2007}$

$= 0 + 0 + \cdots + x^{2005} + x^{2006} + x^{2007}$

$= (x^4)^{501} \cdot x + (x^4)^{501} \cdot x^2 + (x^4)^{501} \cdot x^3$

$= -i - 1 + i$

$= -1$

12. 다음은 두 복소수 z_1, z_2에 대하여 '$z_1 \cdot z_2 = 0$이면 $z_1 = 0$ 또는 $z_2 = 0$'임을 보인 것이다.

> $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ (a, b, c, d는 실수) 라고 하자.
> $z_1 z_2 = 0$이면 $(a+bi)(c+di) = 0$
> 이 식의 양변에 $(a-bi)(c-di)$를 곱하면
> $$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= (a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di)\\ &= (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)\\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2)\end{aligned}$$
> (우변) $= 0 \cdot (a-bi)(c-di) = 0$
> $\therefore\ (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 0$
> 따라서 $a^2+b^2 = 0$ 또는 $c^2+d^2 = 0$이므로
> $a = b = 0$ 또는 $c = d = 0$
> $\therefore\ z_1 = 0$ 또는 $z_2 = 0$

다음 중 위의 과정에 이용되지 않는 성질은?

① 두 실수 x, y에 대하여 $x^2 + y^2 = 0$이면 $x = y = 0$이다.

② 두 실수 x, y에 대하여 $xy = 0$이면 $x = 0$ 또는 $y = 0$이다.

③ 두 실수 x, y에 대하여 $x + yi = 0$이면 $x = y = 0$이다.

④ 임의의 복소수 α에 대하여 $0 \cdot \alpha = 0$이다.

⑤ 복소수 α, β에 대하여 $\alpha\beta = \beta\alpha$이다.

해설

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)라고 하자.
$z_1 z_2 = 0$이면 $(a+bi)(c+di) = 0$
(좌변) $= (a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di) \cdots$ ⑤
$= (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)$
$= (a^2+b^2)(c^2+d^2)$
(우변) $= 0 \cdot (a-bi)(c-di) = 0 \cdots$ ④
$\therefore\ (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 0 \cdots$ ②
따라서 $a^2+b^2 = 0$ 또는 $c^2+d^2 = 0$ 이므로 $\cdots$ ①
$a = b = 0$ 또는 $c = d = 0 \cdots$ ③의 역
$\therefore\ a + bi = 0$ 또는 $c + di = 0$
즉, 이 과정에서 ③의 역은 이용되었지만, ③은 이용되지 않았다.

13. 방정식 $(k^2-3)x+1=-k(2x-1)$에 대하여 해가 무수히 많이 존재하기 위한 k의 값을 k_1, 해가 존재하지 않기 위한 k의 값을 k_2라 할 때, k_1+k_2의 값을 구하면?

① -1　　② 3　　③ -3　　④ 1　　⑤ -2

해설

$(k^2+2k-3)x=k-1$,　$(k-1)(k+3)x=k-1$

$k=1$일 때, $0\cdot x=0$ (부정)

$\therefore\ k_1=1$

$k=-3$일 때, $0\cdot x=-4$ (불능)

$\therefore\ k_2=-3$

$\therefore\ k_1+k_2=-2$

14. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 4x + ka - 2k + b = 0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가지도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a + b$의 값은?

① 0　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

해설

중근을 가지려면 판별식은 0이다.

$D' = 2^2 - (ka - 2k + b) = 0$

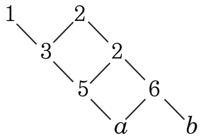
$\Rightarrow \quad (2 - a)k + 4 - b = 0$

모든 k에 대하여 성립하려면

$a = 2,\ b = 4$

$\therefore\ a + b = 6$

15. 다음 그림은 수의 규칙을 나타낸 것이다. a, b와 대응하는 수를 두 근으로 하는 이차방정식을 구하면?



① $x^2 - 5x + 6 = 0$

② $x^2 - 11x + 30 = 0$

③ $x^2 - 41x + 330 = 0$

④ $x^2 - 7x + 8 = 0$

⑤ $x^2 - 15x + 12 = 0$

해설

왼쪽 $1 - 3 - 5 - a$는 윗줄 두 수의 합

오른쪽 $2 - 2 - 6 - b$는 윗줄 두 수의 곱

$\therefore a = 5 + 6 = 11,\ b = 5 \times 6 = 30$

11, 30을 두 근으로 하는 이차방정식은

$\therefore\ x^2 - 41x + 330 = 0$

16. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-i$일 때, 두 실수 a, b의 곱 ab의 값을 구하면?

① -20　② -12　③ 5　④ 12　⑤ 20

해설

한 근이 $2-i$이면 다른 한 근은 $2+i$

두 근의 합 : $4=-a$

두 근의 곱 : $5=b$

$\therefore\ ab=-20$

17. x에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + (k+3) = 0$의 두 근이 모두 음수일 때, 정수 k의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(ⅰ) 두 근이 실수이므로 $\frac{D}{4} \geq 0$

$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 1 \cdot (k+3) \geq 0$

$k^2 - 7k + 6 \geq 0$, $(k-1)(k-6) \geq 0$

$\therefore k \leq 1,\ k \geq 6$

(ⅱ) 두 근의 합은 음수, 곱은 양수

$2(k-3) < 0$, $k+3 > 0$

$\therefore -3 < k < 3$

(ⅰ), (ⅱ)에 따라 $-3 < k \leq 1$

$\therefore$ 정수 k의 최댓값은 1

18. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 가 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x = 2$ 에서 최솟값이 4 이므로
꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 4)$ 이다.
$y = (x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 8$
$a = 4,\ b = 8$
$\therefore a + b = 12$

19. 둘레의 길이가 28cm 인 직사각형에서 넓이를 최대가 되게 하려면 가로와 세로의 길이를 각각 얼마로 하면 되겠는가?

① 가로 6 cm, 세로 8 cm
② 가로 7 cm, 세로 7 cm
③ 가로 8 cm, 세로 9 cm
④ 가로 8 cm, 세로 8 cm
⑤ 가로 7 cm, 세로 9 cm

해설

가로의 길이를 x cm , 세로의 길이를 $(14-x)$ cm , 넓이를 y cm^2 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(14-x) \\ &= -x^2+14x \\ &= -(x^2-14x+49-49) \\ &= -(x-7)^2+49 \end{aligned}$$

따라서 $x=7$, 즉 가로 7 cm, 세로 7 cm 일 때 최댓값 49 cm^2 를 가진다

20. 지상 40m 높이에서 vm/s 의 속도로 똑바로 위로 쏘아올린 공이 t 초 후에 지면으로부터 hm 만큼의 높이가 될 때, $h = vt + 40 - 5t^2$ 의 식이 성립한다. 공이 3 초 후에 최고 높이에 도달했을 때, 이 최고 높이를 구하여라.

▶ **답 :** __________ m

▷ **정답 :** 85 m

해설

$$h = -5t^2 + vt + 40 = -5\left(t - \frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v^2}{20} + 40$$

이 물체는 $t = \dfrac{v}{10}$ 일 때, 최고 높이 $\dfrac{v^2}{20} + 40$ 에 도달하고, $\dfrac{v}{10} = 3$ 이므로 $v = 30$ 이다.

따라서 최고 높이는 85m 이다.

21. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+4=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{3}i$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+ax^2+bx+4=0$ 의 근 $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, \alpha$
세 근의 곱 : $\alpha(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=-4$
$\alpha(1+3)=-4$, $\alpha=-1$
세 근 : $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -1$
세 근의 합 : $1+\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i-1=-a$
$a=-1$
$b=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+(-1)(1-\sqrt{3}i)$
$+(-1)(1+\sqrt{3}i)$
$=1+3-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i=2$
$\therefore\ a+b=-1+2=1$

22. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ **답 :** ______________ cm

▷ **정답 :** 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$ 에서

$3x^3-8x^2-2x+12=0$을 풀면 $x=2$(cm)

23. $x^2+y^2-2y+1=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2-2y+1=0$에서 $x^2+(y-1)^2=0$
$x,\ y$는 실수이므로 $x^2\geq 0,\ (y-1)^2\geq 0$
따라서, $x=0,\ y-1=0$이므로 $x=0,\ y=1$
$\therefore\ x+y=0+1=1$

24. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1+i+z)^2 < 0$	$z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1+i+z)^2 < 0$ 에서 $1+i+z$ 는 순허수이다.

$z = a + bi$라면

$1 + i + z = 1 + i + a + bi = (1+a) + (1+b)i$

이것이 순허수이므로 $1 + a = 0$, $a = -1$

$\therefore\ z = -1 + bi$

또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1+bi)^2 = c + 4i$

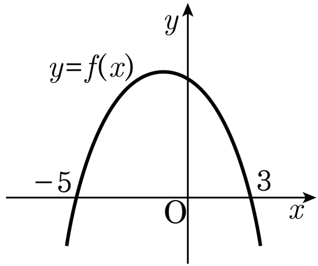
$1 - 2bi - b^2 = c + 4i$

$\therefore\ -2b = 4$, $1 - b^2 = c$

$\therefore\ b = -2,\ c = -3$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 14$

25. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\dfrac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$으로 놓으면

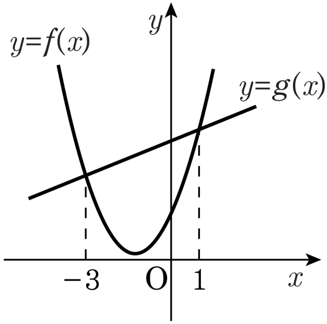
$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right) = \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$이므로

$\dfrac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\dfrac{x-4}{2}\right) = 0$의 두 근의 합은 4

26. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



① -8 ② -6 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$2x^2 + ax + 4 = cx + d$

$\Rightarrow 2x^2 + (a - c)x + 4 - d = 0 \cdots$ ㉠

근이 $-3, 1$ 이므로

$2(x + 3)(x - 1) = 0$과 일치한다.

㉠과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) - g(x) &= 2x^2 + (a - c)x + 4 - d \\ &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x + 1)^2 - 8 \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 : -8

27. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

① $-\frac{7}{8}$ ② -1 ③ $\frac{1}{8}$ ④ 1 ⑤ $-\frac{9}{8}$

해설

$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$

$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$ 이므로 m 의 최댓값은 $-\frac{7}{8}$ 이다.

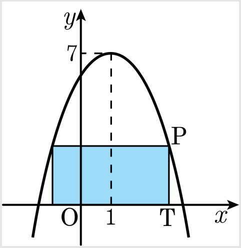
28. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는
$(t,\ -t^2 + 2t + 5)$ 이다.
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,
직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$
\begin{aligned}
(\text{둘레의 길이}) &= 2\{2(t-1) - t^2 + 2t + 5\} \\
&= 2(-t^2 + 4t + 3) \\
&= -2t^2 + 8t + 6 \\
&= -2(t-2)^2 + 14
\end{aligned}
$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

29. x에 관한 삼차방정식 $kx^3+(1-2k)x^2+(k-2)x-2k=0$의 근이 모두 실수가 되기 위한 실수 k의 범위를 구하면?

① $0<k\le\frac{1}{2}$ ② $0<k\le 1$ ③ $-\frac{1}{2}<k\le 0$

④ $-\frac{1}{2}<k\le\frac{1}{2}$ ⑤ $0<|k|\le\frac{1}{2}$

해설

준식$=(x-2)(kx^2+x+k)=0$에서

$kx^2+x+k=0$이 실근이어야하므로

$D=1-4k^2\ge 0$,

$k\ne 0$이므로 $0<|k|\le\frac{1}{2}$

30. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$ 이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\dfrac{3}{4}$ ② $a > -\dfrac{1}{2}$ ③ $-1 < a < 1$

④ $a \leq \dfrac{2}{3}$ ⑤ $a < 2$

해설

$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2-(a+2)t+\dfrac{a^2+1}{4}=0$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$D=(a+2)^2-4\times\dfrac{a^2+1}{4}\geq 0$

$4a+3\geq 0$

$\therefore\ a\geq -\dfrac{3}{4}$

31. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 계산하면?

① $\sqrt{5}i$ ② $-\sqrt{5}i$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{5}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}i$

해설

$\alpha+\beta=-3<0$, $\alpha\beta=1>0$, $D=9-4>0$이므로 두 근은 모두 음수이다.

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ $\alpha<0$, $\beta<0$이므로)

$=-3-2=-5$

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\pm\sqrt{5}i$

한편, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{(-\alpha)\cdot(-1)}+\sqrt{(-\beta)\cdot(-1)}$

$=\sqrt{-\alpha}\cdot i+\sqrt{-\beta}\cdot i$

$=(\sqrt{-\alpha}+\sqrt{-\beta})\cdot i$

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$는 (양수)$\times i$ 꼴이다.

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}i$

32. $x^3=1$의 한 허근을 w라 할 때, $w^{-2n}+w^{-n}+1$의 값들의 합을 구하면? (단, n: 양의 정수)

① 0　② 3　③ 4　④ 1　⑤ -1

해설

$w^3=1,\ w^2+w+1=0$이므로

(ⅰ) $n=3k$일 때

(준식) $=(w^3)^{-2k}+(w^3)^{-k}+1=3$

(ⅱ) $n=3k+1$일 때

(준식) $=(w^3)^{-2k}\cdot w^{-2}+(w^3)^{-k}\cdot w^{-1}+1$

$$=\frac{w}{w^3}+\frac{w^2}{w^3}+1=w^2+w+1=0$$

(ⅲ) $n=3k+2$일 때

(준식) $=(w^3)^{-2k}\cdot w^{-4}+(w^3)^{-k}\cdot w^{-2}+1$

$$=\frac{w^2}{w^6}+\frac{w}{w^3}+1=w^2+w+1=0$$

$\therefore n=3k$이면 3, $n\neq 3k$이면 0

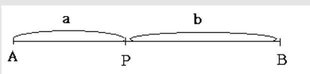
$\therefore$준식의 값들의 합은 3

33. 거리가 100 m 인 두 지점 A, B가 있다. 갑은 A에서 출발하며 B로 달리고, 을은 B에서 출발하여 A로 자전거를 타고 달렸다. 두 사람은 동시에 출발하여 P지점에서 만났는데 만나고 나서 갑은 8초 후에 B에, 을은 2초 후에 A에 도착하였다. 갑, 을이 각각 일정한 속도로 달렸다고 할 때, A, P사이의 거리는?

① 20 m ② 30 m ③ $\frac{100}{3}$ m
④ $\frac{121}{4}$ m ⑤ $\frac{147}{5}$ m

해설

갑의 속도를 α, 을의 속도를 β라 하자.



$a+b=100\cdots$ ①

$\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta},\ \frac{b}{\alpha}=8,\ \frac{a}{\beta}=2$

정리하면 $\frac{a}{\left(\frac{b}{8}\right)}=\frac{b}{\left(\frac{a}{2}\right)}$에서

$\frac{a^2}{2}=\frac{b^2}{8},\ 4a^2=b^2$

$\therefore\ b=2a(\because a,\ b$는 양수)

①에 대입하면, $3a=100\quad a=\frac{100}{3}$ m