

1. 다음 이차방정식 중에서 서로 다른 두 개의 근을 갖는 것은?

① $x^2 - 2x + 1 = 0$

② $x^2 - 6x + 9 = 0$

③ $x^2 + x + 2 = 0$

④ $x^2 - 4x + 5 = 0$

⑤ $x^2 - 3x + 1 = 0$

해설

① $D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$: 중근

② $D = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$: 중근

③ $D = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 < 0$: 근이 없다.

④ $D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0$: 근이 없다.

⑤ $D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$: 서로 다른 두 근

2. 이차방정식 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{6}x = \frac{5}{12}$ 의 두 근의 합을 a , 두 근의 곱을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -5 ② -3 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

양 변에 12 를 곱하면 $3x^2 + 10x = 5$, $3x^2 + 10x - 5 = 0$

두 근의 합 $a = -\frac{10}{3}$

두 근의 곱 $b = -\frac{5}{3}$

$\therefore a+b = -\frac{10}{3} - \frac{5}{3} = -5$

3. 이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$ 의 한 근이 $1 - \sqrt{3}$ 일 때, 유리수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1 - \sqrt{3}$ 이므로 다른 한 근은 $1 + \sqrt{3}$
두 근의 곱은 a 이므로
 $\therefore a = (1 - \sqrt{3}) \times (1 + \sqrt{3}) = -2$

4. 이차방정식 $3x^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 -1 과 2 라고 할 때, $bx^2 + cx + 1 = 0$ 의 두 근의 합은?

① -9 ② -2 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ 2

해설

$$-1 + 2 = -\frac{b}{3}, b = -3$$

$$(-1) \times 2 = \frac{c}{3}, c = -6$$

$$-3x^2 - 6x + 1 = 0$$

따라서 두 근의 합은 $-\frac{(-6)}{-3} = -2$ 이다.

5. 다음은 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은?

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \textcircled{1} &= -\frac{c}{a} + \textcircled{1} \\ (x + \textcircled{2})^2 &= \textcircled{3} \\ x &= \textcircled{4} \pm \textcircled{5} \end{aligned}$$

- ① $\frac{b^2}{4a^2}$

② $\frac{b}{2a}$

③ $\frac{b^2 - 4ac}{2a}$

④ $-\frac{b}{2a}$

⑤ $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

해설

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \leftarrow \text{양변을 } a \text{ 로 나눈다.} \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \leftarrow \text{양변에 } \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} \text{ 을 더한다.} \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \therefore \textcircled{3} \text{ 이 잘못되었다.} \end{aligned}$$

6. 다음은 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$ ($a \neq 0$)을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은? (단, $b^2 - ac \geq 0$)

$$\begin{aligned}
 & ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \\
 & x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a} \\
 & x^2 + \frac{2b}{a}x + \textcircled{1} = -\frac{c}{a} + \textcircled{1} \\
 & (x + \textcircled{2})^2 = \textcircled{3} \\
 & x = \textcircled{4} \pm \textcircled{5}
 \end{aligned}$$

- ① $\frac{b^2}{a^2}$ ② $\frac{b}{a}$ ③ $\frac{b^2 - ac}{a^2}$
 ④ $-\frac{b}{a}$ ⑤ $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a^2}$

해설

$$\begin{aligned}
 & ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \\
 & \text{양변을 } a \text{ 로 나누고 상수항을 이항하면} \\
 & x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a}, \\
 & \text{양변에 } \frac{b^2}{a^2} \text{ 을 더하면} \\
 & x^2 + \frac{2b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{a^2} \\
 & \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2} \\
 & x + \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \\
 & x = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \\
 & \therefore \textcircled{5} \text{가 잘못 되었다.}
 \end{aligned}$$

7. 이차방정식 $-2x^2 + \frac{4}{3}x + 2 = 0$ 을 풀면?

① $x = -3$ 또는 $x = 2$

② $x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{6}$

③ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{6}$

④ $x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$

⑤ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}$

해설

양변에 -3 을 곱한 후 근의 공식을 이용한다.

$$6x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 6 \cdot (-6)}}{12}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 144}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$$

8. 이차방정식 $3x^2 - 16x - ax + 4a + 15 = 0$ 이 정수의 근을 가질 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 6$

▷ 정답 : $a = 10$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면 $-a(x-4)+3x^2-16x+15=0$ 이다.

$$\begin{aligned} a &= \frac{3x^2 - 16x + 15}{(x-4)(3x-4) - 1} \\ &= \frac{x-4}{3x-4 - \frac{1}{x-4}} \end{aligned}$$

a 는 정수이므로 $x-4 = \pm 1$ 이다.

$x = 3$ 또는 $x = 5$ 이므로

(i) $x = 3$ 일 때, $a = 6$

(ii) $x = 5$ 일 때, $a = 10$ 이다.

9. 이차방정식 $\frac{(x-2)(x+1)}{2} = \frac{x(x+1)}{3}$ 의 두 근 중 작은 근을 α 라고 할 때, α^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 6을 곱하여 정리하면

$$3(x-2)(x+1) = 2x(x+1)$$

$$3(x^2 - x - 2) = 2x^2 + 2x$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x-6)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = 6 \text{ 또는 } x = -1$$

$$\alpha = -1 \text{ 이므로 } \alpha^2 = 1$$

10. $(x-y)(x-y-4)+4=0$ 일 때, $x-y$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(x-y)(x-y-4)+4=0$$

$x-y$ 를 A 로 치환하면,

$$A(A-4)+4=0$$

$$A^2-4A+4=0, (A-2)^2=0$$

$$(x-y-2)^2=0$$

$$x-y-2=0$$

$$\therefore x-y=2$$

11. 다음 이차방정식 중에서 근의 개수가 다른 하나는?

① $x^2 + 3x + 3 = 0$

② $3x^2 + 2x - 10 = 0$

③ $3x^2 - 6x + 1 = 0$

④ $x^2 + 2x - 4 = 0$

⑤ $(x - 2)^2 = 3$

해설

① $D = 9 - 12 < 0$ 이므로 해가 없다.
나머지 모두 해의 갯수는 2개이다.

12. 다음식이 x 에 관한 일차식이 완전제곱식이 되도록 하는 k 의 값을 구하여라.

$$\frac{3x^2 + 2x - (k - 3)}{7}$$

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{8}{3}$

해설

$\frac{3}{7}x^2 + \frac{2}{7}x - \frac{k-3}{7} = 0$ 의 이차방정식으로 보면 중근을 갖는 경우이다.

양변에 7을 곱하면

$$3x^2 + 2x - k + 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 3 \times (-k + 3) = 0$$

$$1 + 3k - 9 = 0, 3k = 8$$

$$\therefore k = \frac{8}{3}$$

13. 이차방정식 $x^2 + 8x = 2x + m$ 이 중근을 가질 때, 이차방정식 $(m + 6)x^2 + 14x - 15 = 0$ 의 두 근의 곱을 구하여라. (단, m 은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2 + 8x - 2x - m = 0$, $x^2 + 6x - m = 0$ 가 중근을 가질 때,

$6^2 - 4x(-m) = 0$ 에서 $m = -9$ 이다.

$-3x^2 + 14x - 15 = 0$

$3x^2 - 14x + 15 = 0$ 에서

두 근의 곱은 $\frac{15}{3} = 5$ 이다.

14. 이차방정식 $2x^2 - 2x - 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ 의 값은?

- ① -6 ② $-\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ 6

해설

$2x^2 - 2x - 6 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -3$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = -\frac{1}{3}$$

15. 이차방정식 $x^2 + 3x - 3 = 0$ 의 두 근을 m, n 이라고 할 때, $(m - n)^2$ 의 값은?

① -6 ② 0 ③ 3 ④ 18 ⑤ 21

해설

근과 계수의 관계로부터

$$m + n = -3, mn = -3$$

$$(m - n)^2 = (m + n)^2 - 4mn = 9 + 12 = 21$$

16. 이차방정식 $x^2 + ax + b$ 의 두 근이 $-1, 3$ 일 때, $2x^2 + bx + a = 0$ 을 풀면?

① $-\frac{1}{2}, 2$

② $2, 1$

③ $\frac{1}{2}, 1$

④ $\frac{1}{2}, 2$

⑤ $-\frac{1}{2}, 1$

해설

$$\alpha + \beta = -1 + 3 = -a$$

$$\therefore a = -2$$

$$\alpha\beta = -1 \times 3 = b$$

$$\therefore b = -3$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0, (2x + 1)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2$$

17. 다음은 이차방정식 A 와 A 의 한 근 B 를 나타낸 것일 때, 유리수 a 의 값은?

$$A : -a = (x + 1)^2$$
$$B : -1 - \sqrt{3}$$

- ① -3
- ② -2
- ③ -1
- ④ 1
- ⑤ 3

해설

이차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 $-1 - \sqrt{3}$ 가 근이면 $-1 + \sqrt{3}$ 도 근이다.
 $-a = (x + 1)^2, x^2 + 2x + a + 1 = 0$
근과 계수와의 관계에서
두 근의 곱은 $a + 1 = -2$
 $\therefore a = -3$

18. 두 근의 차가 4 인 이차방정식 $x^2 + 2kx + 2k - 3 = 0$ 이 있을 때, 모든 k 의 값의 곱은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

두 근을 α , $\alpha - 4$ 이라 하면

$$\alpha + \alpha - 4 = -2k, \alpha(\alpha - 4) = 2k - 3$$

$$\alpha = 2 - k$$

$$(2 - k)(2 - k - 4) = 2k - 3$$

$$k^2 - 2k - 1 = 0$$

$\therefore$ 모든 k 값의 곱은 -1 이다.

19. x^2 의 계수가 3인 이차방정식이 있다. x 의 계수를 바꾸었더니 두 근이 1과 2가 되었고, 상수항을 바꾸었더니 두 근이 4와 $-\frac{1}{3}$ 이 되었다. 처음 주어진 이차방정식의 두 근 중 큰 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$3(x-1)(x-2)=0 \text{에서 } 3x^2-9x+6=0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$3(x-4)(x+\frac{1}{3})=0 \text{에서 } 3x^2-11x-4=0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 x 의 계수를 바꾸었고 ㉡에서 상수항을 바꾸었으므로 원래의 이차방정식은

$$3x^2-11x+6=(x-3)(3x-2)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}$$

따라서 큰 근은 $x=3$ 이다.

20. 이차방정식 $(x-1)(3x-2)=0$ 을 $ax^2+bx+c=0$ 의 꼴로 나타낼 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$(x-1)(3x-2)=0$$

$$3x^2-5x+2=0$$

$$\therefore a=3, b=-5, c=2$$

$$\therefore a+b+c=3-5+2=0$$

21. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 해가 $-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ 일 때, $ax^2 + bx + 1 = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

근과 계수의 관계로부터

$$-a = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}, a = \frac{1}{4}$$

$$b = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$$

$ax^2 + bx + 1 = 0$ 에 $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{3}{8}$ 대입하면

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x + 1 = 0$$

따라서 두 근의 합은 $-\frac{\left(-\frac{3}{8}\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$ 이다.

22. 이차방정식 $x^2 - 6x - 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은? (단, x^2 의 계수는 4이다.)

① $6x^2 + 4x - 1 = 0$

② $3x^2 + 6x + 1 = 0$

③ $2x^2 + 6x + 1 = 0$

④ $4x^2 + 6x + 1 = 0$

⑤ $4x^2 + 6x - 1 = 0$

해설

이차방정식 $x^2 - 6x - 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 일때, $\alpha + \beta = 6$,
 $\alpha\beta = -4$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

양변에 4를 곱하면 $4x^2 + 6x - 1 = 0$

23. 기호 $[a]$ 는 a 의 값을 넘지 않는 최대 정수를 나타낸다. 예를 들면 $[1.2] = 1$, $[\sqrt{5}] = 2$ 이다. 이차방정식 $x^2 - 4x - 7 = 0$ 의 근 중 양수인 것을 a 라 할 때, $(a - [a] + 3)^2$ 의 값을 구하면?

- ① 5 ② 7 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$$x^2 - 4x - 7 = 0 \text{ 에서}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 28}}{2} = 2 \pm \sqrt{11}$$

$$\text{따라서 양수인 근 } a \text{ 는 } 2 + \sqrt{11}$$

$$3 < \sqrt{11} < 4 \text{ 이므로 } 5 < 2 + \sqrt{11} < 6$$

$$\therefore [a] = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore (a - [a] + 3)^2 &= (2 + \sqrt{11} - 5 + 3)^2 \\ &= (\sqrt{11})^2 = 11 \end{aligned}$$

24. 두 이차방정식 $x^2 - 12x + a = 0$, $(x - b)^2 = 0$ 의 근이 같고 근의 개수는 1개일 때, $a + b$ 의 값은?

① 6 ② 12 ③ 24 ④ 36 ⑤ 42

해설

$x^2 - 12x + a = 0$ 은 중근을 가지고, $(x - b)^2 = 0$ 도 같은 근을 가진다.

따라서 $a = 36$, $b = 6$ 이므로

$a + b = 42$ 이다.

25. 이차방정식 $x^2 + (m - 4)x + 40 = 0$ 의 두 근의 차가 3일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?
- ① 큰 근을 α 라 하고 $\alpha < 0$ 이면 $m = 17$ 이다.
 - ② 주어진 식을 만족하는 해는 8, 5 또는 $-5, -8$ 이다.
 - ③ 주어진 식을 만족하는 모든 m 의 값의 합은 9이다.
 - ④ 작은 근을 α 라 하고 $\alpha > 0$ 이면 $m < 0$ 이다.
 - ⑤ 모든 m 의 값의 곱은 0보다 작다.

해설

두 근을 $\alpha, \alpha - 3$ 이라 하면
 $\alpha(\alpha - 3) = 40$
 $\alpha = 8$ 또는 $\alpha = -5$
따라서 두 근은 8, 5 또는 $-5, -8$ 이다.
두 근의 합은 $13 = 4 - m, m = -9$ 또는 $-13 = 4 - m, m = 17$
따라서 주어진 식을 만족하는 모든 m 의 값의 합은 8이다.

26. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 이 두 근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하시오.
(단, $\alpha = \beta$ 인 경우 포함)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = 9 - 2a^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2a)^2 - 2(9 - 2a^2) = 8a^2 - 18$$

그런데 주어진 이차방정식은 두 근을 가지므로

$$D' = a^2 - (9 - 2a^2) \geq 0 \therefore a^2 \geq 3$$

$$a^2 \geq 3 \text{ 이므로 } 8a^2 - 18 \geq 6$$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값은 6 이다.

27. 이차방정식 $x^2 - (a-1)x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $(\alpha^2 - a\alpha + 1)(\beta^2 - a\beta + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x = \alpha, x = \beta$ 를 대입하면

$$\alpha^2 - a\alpha + \alpha + 1 = 0, \alpha^2 - a\alpha + 1 = -\alpha$$

$$\beta^2 - a\beta + \beta + 1 = 0, \beta^2 - a\beta + 1 = -\beta$$

$$\therefore (\alpha^2 - a\alpha + 1)(\beta^2 - a\beta + 1) = (-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta = 1$$

28. 이차방정식 $2x^2 - 2ax + 12 = 0$ 의 두 근의 비가 $2 : 3$ 이 되는 a 의 값은?

① ± 1

② ± 2

③ ± 3

④ ± 4

⑤ ± 5

해설

두 근을 각각 $2k, 3k(k \neq 0)$ 라 하면

$$\begin{aligned} 2(x - 2k)(x - 3k) &= 2x^2 - 10kx + 12k^2 \\ &= 2x^2 - 2ax + 12 \end{aligned}$$

$$\therefore k = \pm 1$$

$$10k = 2a \text{ 이므로}$$

$$k = 1 \text{ 일 때 } a = 5$$

$$k = -1 \text{ 일 때 } a = -5$$

$$\therefore a = \pm 5$$

29. x^2 의 계수가 1인 어떤 이차방정식을 x 의 계수를 잘못 보고 풀었더니 해가 1, 5 이었고, 상수항을 잘못 보고 풀었더니 해가 -2, -4 이었다. 이 방정식의 옳은 근은?

- ① 2, 5
- ② 2, -5
- ③ 1, 5
- ④ 1, 2
- ⑤ -1, -5

해설

원래 이차방정식을 $x^2 + ax + b = 0$ 이라 하면
 $b = 1 \times 5 = 5, -a = -2 + (-4) = -6, a = 6$
따라서 $x^2 + 6x + 5 = 0, (x + 1)(x + 5) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = -5$

해설

$(x - 1)(x - 5) = 0, x^2 - 6x + 5 = 0$
일차항의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 5
 $(x + 2)(x + 4) = 0, x^2 + 6x + 8 = 0$
상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 6
따라서 $x^2 + 6x + 5 = 0, (x + 1)(x + 5) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = -5$