1. 다음 중 옳은 것은?

① $a < 0$ 이면 $\sqrt{a^2} = a$

② $a < b$ 이면 $\sqrt{(a-b)^2} = a-b$

③ 음수의 제곱근은 음수이다.

④ 0의 제곱근은 0이다.

⑤ $\sqrt{(-5)^2} = -5$

해설

① $a < 0$ 이면 $\sqrt{a^2} = -a$

② $a < b$ 이면 $\sqrt{(a-b)^2} = -(a-b) = b-a$

③ 음수의 제곱근은 없다.

⑤ $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

2. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 서로 다른 두 유리수 사이에는 무한 개의 유리수가 있다.
- ② 서로 다른 두 유리수 사이에는 유한 개의 무리수가 있다.
- ③ 서로 다른 두 무리수 사이에는 무한 개의 유리수가 있다.
- ④ 서로 다른 두 무리수 사이에는 무한 개의 무리수가 있다.
- ⑤ 서로 다른 두 유리수 사이에는 무한 개의 무리수가 있다.

해설

서로 다른 두 유리수나 무리수 사이에는 무수히 많은 유리수와 무리수가 있다.

3. x 의 값의 범위가 $0 \leq x < 3$ 일 때, 이차방정식 $3x^2 - 10x + 3 = 0$ 을 만족시키는 해를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x = \frac{1}{3}$

해설

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$(3x - 1)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 3$$

x 의 값의 범위가 $0 \leq x < 3$ 이므로 $x = \frac{1}{3}$ 이다.

4. 이차방정식 $(3x - 2)(2x + 3) = 0$ 을 풀면?

① $x = 2$ 또는 $x = -3$

② $x = -2$ 또는 $x = 3$

③ $x = \frac{2}{3}$ 또는 $x = -\frac{3}{2}$

④ $x = -\frac{2}{3}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

⑤ $x = 2$ 또는 $x = -\frac{3}{2}$

해설

각각의 항을 0 으로 만드는 값을 찾는다.

$$3x - 2 = 0 \text{ 또는 } 2x + 3 = 0$$

$$\therefore x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = -\frac{3}{2}$$

5. x 에 관한 이차방정식 $mx^2 + mx + m + n = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, $m \neq 0$)

▶ 답:

▷ 정답: $x = 0$

해설

주어진 식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$m - m + m + n = 0$$

$$n + m = 0 \quad \therefore n = -m$$

$$mx^2 + mx = 0$$

$$m(x^2 + x) = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = -1$$

6. 이차방정식 $0.2x^2 - 0.3x - 1 = 0$ 의 두 근 중에서 큰 근을 k 라고 할 때, k 보다 크지 않은 최대의 정수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$0.2x^2 - 0.3x - 1 = 0$ 의 양변에 10 을 곱하면

$$2x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{89}}{4}$$

따라서 $k = \frac{3 + \sqrt{89}}{4}$ 이므로 최대 정수는 3 이다.

7. 다음 식을 간단히 하여라.

$$-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} \times \sqrt{0.4^2} - \sqrt{(-1.2)^2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1.8

해설

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} \times \sqrt{0.4^2} - \sqrt{(-1.2)^2} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times 0.4 - 1.2 \\ &= -0.5 - 0.1 - 1.2 = -1.8 \end{aligned}$$

8. 두 자연수 a, b 에 대하여 $\sqrt{270a} = b$ 일 때, $a + b$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 120

해설

$$\sqrt{270a} = \sqrt{3^3 \times 2 \times 5 \times a}$$

근호 안의 소인수의 지수가 모두 짝수가 되어야 하므로 $a = 3 \times 2 \times 5 = 30$ 이다.

a 를 대입하면 $\sqrt{270a} = \sqrt{3^3 \times 2 \times 5 \times a} = \sqrt{3^4 \times 2^2 \times 5^2} = 3^2 \times 2 \times 5 = b$ 이다.

따라서 $b = 90$ 이다.

9. 다음 두 수 6 과 15 사이에 있는 정수 n 에 대하여 $\sqrt{n}$ 이 무리수인 n 의 개수는?

① 11 개

② 10 개

③ 9 개

④ 8 개

⑤ 7 개

해설

7 ~ 14 까지의 정수 중 $3^2 = 9$ 제외.

7, 8, 10, 11, 12, 13, 14 (7개)

10. $\sqrt{5} \times 3\sqrt{a} = 15$, $\sqrt{3} \times \sqrt{b} = 6$, $\sqrt{2.43} = c\sqrt{3}$ 일 때, 유리수 a, b, c 의 곱 abc 의 값은?

① 60

② 54

③ $\frac{54}{5}$

④ $3\sqrt{6}$

⑤ 1

해설

$$3\sqrt{a} = \frac{15}{\sqrt{5}}, \sqrt{a} = \frac{15}{3\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\therefore a = 5$$

$$\sqrt{b} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$$

$$\therefore b = 12$$

$$\sqrt{\frac{243}{100}} = \frac{9\sqrt{3}}{10} = c\sqrt{3}$$

$$\therefore c = \frac{9}{10}$$

$$\therefore abc = 5 \times 12 \times \frac{9}{10} = 54$$

11. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ 일 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(39) + f(40)$ 의 값을 구하면?

① $\sqrt{40} - 1$

② $\sqrt{40} + 1$

③ $\sqrt{41} - 1$

④ $\sqrt{41} + 1$

⑤ $\sqrt{41} - \sqrt{40}$

해설

$$f(1) = \sqrt{2} - 1 = -1 + \sqrt{2}$$

$$f(2) = \sqrt{3} - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$f(3) = \sqrt{4} - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + \sqrt{4} \dots$$

$$f(39) = \sqrt{40} - \sqrt{39} = -\sqrt{39} + \sqrt{40}$$

$$f(40) = \sqrt{41} - \sqrt{40} = -\sqrt{40} + \sqrt{41}$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(39) + f(40)$$

$$= (-1 + \sqrt{2}) + (-\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (-\sqrt{3} + \sqrt{4}) + \dots + (-\sqrt{39} + \sqrt{40}) + (-\sqrt{40} + \sqrt{41}) = -1 + \sqrt{41}$$

12. $(x-2)x^2 - 3(x-2)x - 10(x-2)$ 를 인수분해하면?

① $(x-2)(x-5)(x+2)$

② $(x-2)(x+5)(x+2)$

③ $(x-2)(x-5)(x+3)$

④ $(x-2)(x+5)(x-2)$

⑤ $(x-2)(x+5)(x-3)$

해설

$A = x - 2$ 로 치환하면

$$(x-2)x^2 - 3(x-2)x - 10(x-2)$$

$$= Ax^2 - 3Ax - 10A$$

$$= A(x^2 - 3x - 10)$$

$$= A(x-5)(x+2)$$

$$= (x-2)(x-5)(x+2)$$

13. 다음 중 $x^2y^2 - x^2y - xy^2 + xy$ 의 인수는?

- ① $x - 1$ ② $x + 1$ ③ $y + 1$ ④ $x + y$ ⑤ $x - y$

해설

$$\begin{aligned}x^2y^2 - x^2y - xy^2 + xy &= xy(xy - x - y + 1) \\ &= xy \{x(y - 1) - (y - 1)\} \\ &= xy(x - 1)(y - 1)\end{aligned}$$

14. $a = \sqrt{3} + 2$ 일 때, $3(a+2)^2 - 2(a+2) - 8$ 의 값은?

① $41 - 22\sqrt{3}$

② $22 + 41\sqrt{3}$

③ $22 - 41\sqrt{3}$

④ $22\sqrt{3} - 41$

⑤ $41 + 22\sqrt{3}$

해설

$a + 2 = t$ 로 치환하면

$$3(a+2)^2 - 2(a+2) - 8$$

$$= 3t^2 - 2t - 8$$

$$= (t-2)(3t+4)$$

$$= (a+2-2) \{3(a+2)+4\} = a(3a+10)$$

$$= (\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}+16)$$

$$= 41 + 22\sqrt{3}$$

15. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값은?

$$\frac{ax^2 - 3x - b}{4x^2 + cx - 5} = 2$$

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{7}{2}$

③ $\frac{9}{2}$

④ $\frac{11}{2}$

⑤ $\frac{33}{2}$

해설

$$\frac{ax^2 - 3x - b}{4x^2 + cx - 5} = 2 \text{를 정리하면,}$$

$$(a - 8)x^2 + (-3 - 2c)x - b + 10 = 0$$

이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한
항등식이다.

$$\text{따라서 } a - 8 = 0, \quad -3 - 2c = 0, \quad -b + 10 = 0$$

$$\therefore a = 8, \quad b = 10, \quad c = -\frac{3}{2}$$

$$a + b + c = \frac{33}{2} \text{이다.}$$

16. x 에 관한 이차방정식 $2x^2 - px - 3p = 0$ ($p \neq 0$) 의 한 근이 $2p$ 일 때, x 의 값을 구하면?

① $x = -2$ 또는 $x = 1$

③ $x = \frac{4}{3}$ 또는 $x = 4$

⑤ $x = \frac{3}{4}$ 또는 $x = -1$

② $x = -\frac{3}{4}$ 또는 $x = 1$

④ $x = \frac{3}{4}$ 또는 $x = 1$

해설

$x = 2p$ 를 방정식에 대입하면

$$8p^2 - 2p^2 - 3p = 0$$

$$6p^2 - 3p = 0$$

$$3p(2p - 1) = 0$$

$$p = \frac{1}{2} \quad (\because p \neq 0)$$

$$2x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

$$4x^2 - x - 3 = 0$$

$$(4x + 3)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{4} \text{ 또는 } x = 1$$

17. 이차방정식 $2x^2 + px + q = 0$ 의 해가 $\frac{5 + \sqrt{3}}{2}$, $\frac{5 - \sqrt{3}}{2}$ 일 때, $p + q$, $2p + q$ 를 해로 갖고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2 - 8x - 9 = 0$

② $x^2 + 8x - 9 = 0$

③ $x^2 + 8x + 9 = 0$

④ $x^2 + x - 9 = 0$

⑤ $x^2 + x + 9 = 0$

해설

$$\frac{5 + \sqrt{3}}{2} + \frac{5 - \sqrt{3}}{2} = 5 = -\frac{p}{2}$$

$$\left(\frac{5 + \sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{5 - \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{11}{2} = \frac{q}{2}$$

$$\therefore p = -10, q = 11$$

따라서 $p + q = 1$, $2p + q = -9$ 이므로 1 과 -9 를 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 $(x - 1)(x + 9) = 0$

$$\therefore x^2 + 8x - 9 = 0$$

18. x^2 의 계수가 1인 어떤 이차방정식을 x 의 계수를 잘못 보고 풀었더니 해가 1, 5이었고, 상수항을 잘못 보고 풀었더니 해가 -2, -4이었다. 이 방정식의 옳은 근은?

① 2, 5

② 2, -5

③ 1, 5

④ 1, 2

⑤ -1, -5

해설

원래 이차방정식을 $x^2 + ax + b = 0$ 이라 하면

$$b = 1 \times 5 = 5, -a = -2 + (-4) = -6, a = 6$$

$$\text{따라서 } x^2 + 6x + 5 = 0, (x + 1)(x + 5) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = -5$$

해설

$$(x - 1)(x - 5) = 0, x^2 - 6x + 5 = 0$$

일차항의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 5

$$(x + 2)(x + 4) = 0, x^2 + 6x + 8 = 0$$

상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 6

$$\text{따라서 } x^2 + 6x + 5 = 0, (x + 1)(x + 5) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = -5$$

19. 놀이동산의 입장 요금을 $x\%$ 인상하면 입장객은 $0.8x\%$ 줄어든다고 한다. 요금을 올리기 전보다 수입이 10% 가 줄어들 때의 요금 인상률은?

① 40%

② 45%

③ 50%

④ 55%

⑤ 60%

해설

인상 전의 입장요금을 A 원, 입장객 수를 B 명, 요금 인상률을 $x\%$ 라 하면

인상 후의 요금은 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 원, 입장객 수는

$B\left(1 - \frac{8x}{1000}\right)$ 명, 입장 수입은 $A \times B \times \left(1 - \frac{10}{100}\right)$

$$A\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times B\left(1 - \frac{8x}{1000}\right) = A \times B \times \left(1 - \frac{10}{100}\right)$$

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{8x}{1000}\right) = \left(1 - \frac{10}{100}\right)$$

$$x^2 - 25x + 1250 = 0$$

$$(x - 50)(x + 25) = 0$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 50$$

20. $x = 2 - \sqrt{3}$ 일 때, $x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $3 - \sqrt{3}$

해설

$x - 2 = \sqrt{3}$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 - 4x = -1$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식}) &= x(x^2 - 4x) + 2x + 1 \\ &= x + 1 = 2 - \sqrt{3} + 1 \\ &= 3 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

21. 일차방정식 $(\sqrt{3} + 1)x = (4 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2)$ 의 해는 $x = a + b\sqrt{3}$ 이다. 이때, $\sqrt{a+b}$ 의 값은? (단, a, b 는 유리수)

① 0

② 1

③ $\sqrt{2}$

④ $\sqrt{3}$

⑤ 2

해설

$$(\sqrt{3} + 1)x = (4 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2)$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{(4 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2)}{\sqrt{3} + 1} \\&= \frac{2\sqrt{3} + 5}{\sqrt{3} + 1} \\&= \frac{(2\sqrt{3} + 5)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\&= \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

따라서, $\sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \sqrt{2}$

22. 서로소인 두 자연수 m, n 에 대하여 $\left[10\sqrt{\frac{n}{m}}\right] = 20$, $\sqrt{(m-n)^2} = 100$ 일 때, $m+n$ 의 값이 될 수 있는 수를 모두 구하여라. (단, $[a]$ 는 a 보다 크지 않은 최대의 정수)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m+n = 162$

▷ 정답 : $m+n = 166$

해설

$$\left[10\sqrt{\frac{n}{m}}\right] = 20 \text{ 에서}$$

$$20 \leq 10\sqrt{\frac{n}{m}} < 21, 2 \leq \sqrt{\frac{n}{m}} < 2.1$$

$$\therefore 4 \leq \frac{n}{m} < 4.41 \dots \textcircled{\text{A}}$$

이때, $\frac{n}{m} > 1$ 이므로 $n > m$

$$\sqrt{(m-n)^2} = 100, n-m = 100$$

$$\therefore n = m + 100 \dots \textcircled{\text{B}}$$

$$\textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}} \text{에서 } 4 \leq \frac{m+100}{m} < 4.41$$

$$4 \leq 1 + \frac{100}{m} < 4.41, 3 \leq \frac{100}{m} < 3.41$$

$$3m \leq 100 < 3.41m$$

$$3m \leq 100 \text{ 에서 } m \leq 33.3\dots \dots \textcircled{\text{C}}$$

$$100 < 3.41m \text{ 에서 } m > 29.3\dots \dots \textcircled{\text{D}}$$

$$\textcircled{\text{C}}, \textcircled{\text{D}} \text{에서 } 29.3 \times \times \times < m \leq 33.3 \times \times \times$$

$$\therefore m = 30, 31, 32, 33$$

이때 각각의 m 에 대한 n 의 값은

$$n = 130, 131, 132, 133 \text{ 이다.}$$

그런데 m, n 은 서로소이므로

$$(m, n) = (31, 131), (33, 133) \text{ 이므로}$$

$$m+n = 162, \text{ 또는 } 166 \text{ 이다.}$$

23. $\frac{(a+1)^2 + (b+1)^2}{(a+1)(b+1)} = -2$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b = -2$

해설

$a+1 = A$, $b+1 = B$ 로 치환하면

$$\frac{(a+1)^2 + (b+1)^2}{(a+1)(b+1)} = \frac{A^2 + B^2}{AB} = -2$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = 0, (A+B)^2 = 0$$

$$A+B = a+b+2 = 0$$

$$\therefore a+b = -2$$

24. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) - 40$ 이 $(x+a)(x+b)(x^2+c)$ 로 인수분해 될 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b+c=4$

해설

$$\begin{aligned} & (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) - 40 \\ &= (x^2-1)(x^2-4) - 40 \\ &= x^4 - 5x^2 - 36 \\ &= (x^2+4)(x^2-9) \\ &= (x-3)(x+3)(x^2+4) \text{ 이므로} \\ & a+b+c=4 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

25. $x = -3 + \sqrt{5}$, $y = 3 + \sqrt{5}$ 일 때 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{3}{2}$

해설

$$\begin{aligned}y - x &= 3 + \sqrt{5} - (-3 + \sqrt{5}) \\ &= 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}xy &= (-3 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) \\ &= (\sqrt{5} - 3)(\sqrt{5} + 3) \\ &= 5 - 9 = -4\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y - x}{xy} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$